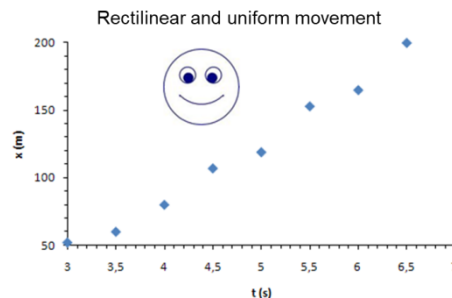


REPRESENTACIONES GRÁFICAS. AJUSTE LINEAL POR MINIMOS CUADRADOS

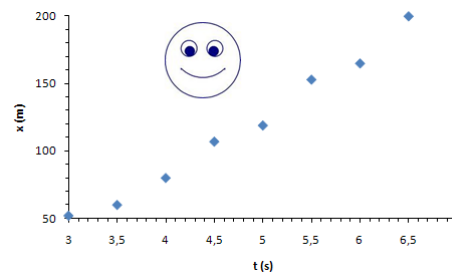
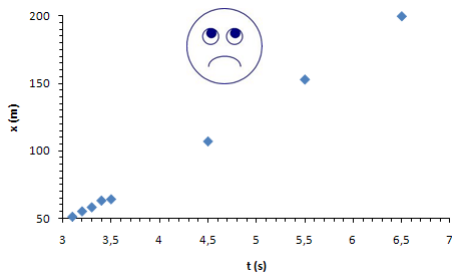
1 REPRESENTACIONES GRÁFICAS.

Cuando hacemos **medidas** de un fenómeno físico, sus resultados deben ser, en primer lugar, ordenados y organizados **en una tabla**. De este modo, es fácil entender cómo evoluciona la cantidad medida. Pero si queremos ir más allá, podemos **representar gráficamente nuestras medidas** para tener una imagen visual y una idea clara sobre el fenómeno físico que estamos estudiando. Pero cualquier representación gráfica debe **tener en cuenta algunos detalles** para que la gráfica obtenida pueda ser útil y fácilmente interpretada. Algunos de las reglas a tener en cuenta se dan a continuación:

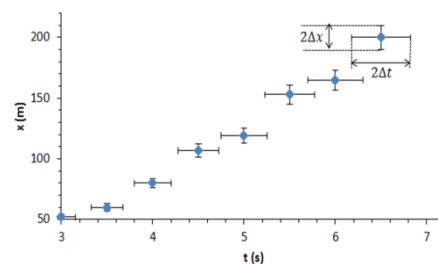
- La variable **independiente** debe ser representada en **abscisas** (eje horizontal), y la variable dependiente en **ordenadas** (eje vertical).
- El gráfico debe tener **un título** que describa su contenido de forma clara.
- Como estamos midiendo sólo varios puntos experimentales, sólo estos puntos deben ser dibujados. Como norma general, **ninguna línea tiene que unir los puntos experimentales**.
- Las **magnitudes** representadas deben indicarse **en ambos ejes**, así como sus **unidades** entre paréntesis.
- Las escalas deben ser **adecuadas** (no es necesario que comiencen desde cero).



- Las medidas deben ser **uniformemente espaciadas** en el intervalo de valores medidos.



- Las **barras de error** (representación gráfica de los errores) tienen que representarse siempre que sea posible.



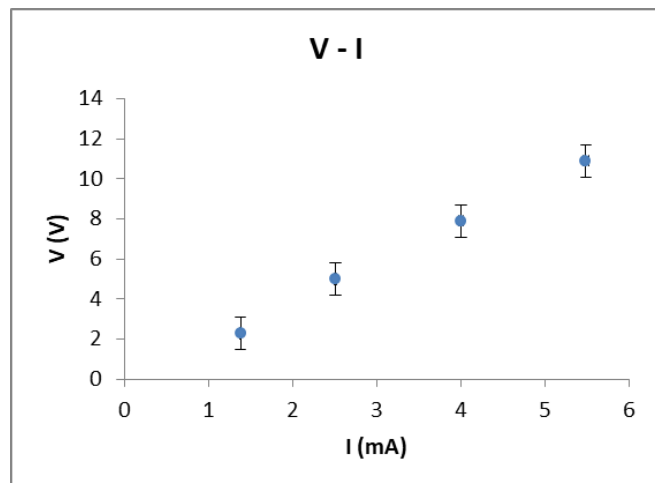
2 REPRESENTACIONES GRÁFICAS CON EXCEL

Cuando se completa una tabla con todos los datos y cálculos, podemos hacer la representación gráfica de datos y/o cálculos. Para ello, normalmente utilizaremos “**gráficos X-Y de dispersión**”; ello significa que representaremos únicamente los puntos experimentales medidos, sin ninguna línea que los una. Para ello, si trabajamos con la hoja de cálculo **Excel de Microsoft Office 365** (el manejo es similar con versiones anteriores de Excel, aunque los menús pueden encontrarse en lugares diferentes) debemos, en primer lugar, especificar el tipo de gráfico que queremos. Vamos a “**Insertar/Gráficos/Dispersión (Sólo con marcadores)**”. Cuando la ventana gráfica se abre, debemos seleccionar los datos a dibujar: “**Botón derecho del ratón /Seleccionar datos**”. En la ventana podemos añadir tantas series como queramos; para cada una de ellas, “**Agregar**” y debemos seleccionar el título y el rango de celdas que deben ser representadas en los ejes X e Y. Una vez representada la gráfica (o las gráficas), si clicamos en el gráfico, nos aparecerán tres iconos en la parte superior derecha que nos dan muchas opciones para formatear el gráfico (tamaños, colores, escalas de los ejes, rótulos de ejes y gráfico, opción para representar barras de error, etc...). Es posible representar varias series de datos en el mismo gráfico, pudiendo utilizar dos ejes diferentes en ordenadas (primario y secundario). No obstante, el eje de abscisas (X) tiene que ser el mismo para todas las series.

Es muy importante **formatear adecuadamente el gráfico**, escribiendo las **magnitudes y unidades de cada eje**, **ajustando las escalas** para que los puntos experimentales queden **uniformemente distribuidos** en todo el gráfico, y eliminar **todos los elementos innecesarios**.

Ejemplo: Se mide una resistencia desconocida aplicando una diferencia de potencial conocida (voltaje) entre sus terminales, y midiendo la intensidad de corriente que circula por la resistencia. La ley de Ohm establece que el voltaje entre los terminales de una resistencia y su intensidad están relacionados linealmente ($V=IR$) en un amplio rango de valores de V e I . Si queremos probar esta relación lineal, entonces tendremos que representar las medidas y verificar que esta gráfica es una línea recta. Los valores medidos, junto con sus errores, se muestran en la tabla, así como la correspondiente gráfica con las barras de error. Las barras de error horizontales están dibujadas, pero son tan pequeñas que no pueden verse.

V (V)	I (mA)	ΔV (V)	ΔI (mA)
2,3	1,382	0,8	0,010
5,0	2,513	0,8	0,016
7,9	4,00	0,8	0,02
10,9	5,49	0,8	0,03



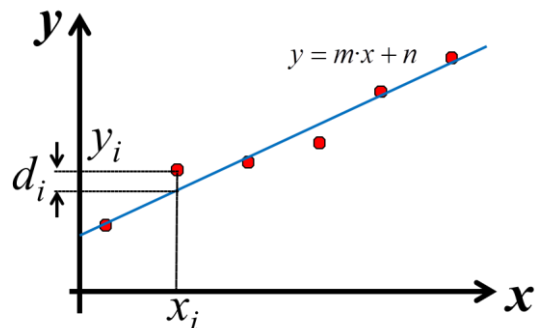
3 AJUSTE LINEAL

Una gráfica puede ser útil cuando queremos **verificar** si un **fenómeno físico** se comporta según una teoría existente, o si estamos **buscando la magnitud de algún parámetro** de una ley física que no podemos medir directamente con un aparato de medida.

Si consideramos el caso del ejemplo anterior, donde hemos verificado que las magnitudes medidas están linealmente relacionadas, podríamos calcular el valor de la resistencia como la pendiente de la recta de la gráfica. En caso de que la ley física estudiada no fuera lineal, los valores experimentales podrían ser ajustados a otras funciones, pero este problema reviste mayores dificultades.

Enfocaremos nuestro estudio a un **ajuste lineal**, utilizando el método de los **mínimos cuadrados**. Este método busca los parámetros **m** y **n** de la línea recta (**$y=mx+n$**) que “mejor” ajusta los puntos experimentales. El “mejor” ajuste es aquel que **minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores medidos y los predichos por la ecuación del ajuste**.

Si los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_N, y_N)$ son los **N** pares de los valores experimentalmente medidos y la línea recta que mejor los ajusta es **$y=mx+n$** , entonces el método de los mínimos cuadrados busca aquellos valores de **m** y **n** que minimizan la función



$$Error = \sum_{n=1...N} d_i^2 = \sum_{n=1...N} (y_i - (mx_i + n))^2$$

donde el cuadrado evita que las diferencias positivas anulen las negativas.

Cuando llevamos a cabo un ajuste lineal, **podemos dibujar la línea obtenida**, entendida esta línea como **el comportamiento más probable** del fenómeno físico que estamos estudiando. Esta línea (que se llama **línea de ajuste o recta de regresión**) no debe, necesariamente, unir todos los puntos experimentales. Las diferencias entre el comportamiento pronosticado por esta línea y las medidas experimentales deben atribuirse a errores experimentales.

El cálculo de los parámetros **m** y **n** de la recta de regresión se pueden calcular mediante las ecuaciones correspondientes, en función de los valores medidos experimentalmente, pero la hoja de cálculo **Excel dispone del comando ESTIMACION.LINEAL (LINEST)**, que calcula directamente los valores de **m y n y sus errores**.

Los **errores de m y n no dependen de los errores de los puntos experimentales**, por lo que no es necesario calcular los errores de cada una de las medidas tomadas. Los **errores de m y n** sólo dependen de la dispersión de tales puntos experimentales con respecto a la línea de ajuste, y el grado en el que los puntos experimentales se ajustan, o no, a una línea recta puede evaluarse mediante el coeficiente de correlación del ajuste (**R^2**):

$$R^2 = \frac{\sum_{n=1...N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{n=1...N} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{n=1...N} (y_i - \bar{y})^2}}$$

R^2 puede variar entre 0 (el **peor ajuste posible** de los puntos experimentales a la línea recta calculada) y 1 (**puntos experimentales exactamente alineados sobre la línea recta calculada**).

Por otra parte, un ajuste puede en ocasiones detectar y corregir errores sistemáticos, de otro modo muy difíciles de detectar.

En la hoja Excel se puede encontrar el comando **ESTIMACION.LINEAL (LINEST)**, que calcula directamente los valores de m y n y sus errores, además del coeficiente de correlación R^2 .

4 AJUSTE LINEAL CON EXCEL. COMANDO ESTIMACION.LINEAL

La utilización de este comando es ligeramente distinta según se utilice Excel de Microsoft Office 365, o una versión anterior a Office 365.

4.1 COMANDO ESTIMACION LINEAL EN OFFICE 365

En un **ajuste lineal con Excel**, la **hoja de cálculo nos da** directamente tanto los parámetros de la ecuación (m y n) como **sus errores**.

Si estamos utilizando **Excel de Office 365**, el siguiente ejemplo muestra cómo proceder:

Ejemplo: Utilizando el ejemplo mostrado en el párrafo 2. REPRESENTACIONES GRAFICAS CON EXCEL, calcularemos la ecuación del ajuste lineal y el error de sus parámetros mediante el comando **ESTIMACION.LINEAL** En Excel. Para ello, debemos hacer lo siguiente:

- **Nos situamos en una celda vacía que tenga libres 4 filas por debajo de ella, y una columna libre a su derecha (en total, un bloque vacío de cinco filas y dos columnas (10 celdas).**
- **En la celda en la que nos situado, en la barra de funciones escribimos “=” y del desplegable de su izquierda, seleccionamos la función “ESTIMACION.LINEAL”; es preferible seleccionar esta función del menú desplegable antes que escribirla.**
- **Se abre una nueva ventana y debemos ahora introducir en “Conocido_y” y “Conocido_x”, los rangos de celdas donde se encuentran los datos que queremos ajustar en ambos ejes. En “Constante” y “Estadística” debemos introducir “1” y “1”, y **Aceptar**.**
- **En el bloque seleccionado deben aparecer, aproximadamente, los siguientes valores:**

2,0727055	-0,41079079
0,0602539	0,2221343
0,99832311	0,18587688
1183,32731	2
41,1379707	0,06952932

La **primera fila** muestra los valores de la **pendiente (m)** del ajuste lineal y la **ordenada en el origen (n)**. La **segunda fila** nos da los **errores** de pendiente y ordenada en el origen

Entonces, el valor de la resistencia (pendiente del ajuste lineal), después de redondear el error y la medida es:

$$R=2,07 \pm 0,06 \text{ K}\Omega$$

Y el valor de la ordenada en el origen, con su error, es

$$n = -0,41 \pm 0,22 \text{ V}$$

Y el **primer valor de la tercera fila** nos da el **coeficiente de correlación** $R^2=0,998$ (cercano a 1) lo que significa que los puntos experimentales se alinean casi perfectamente sobre una línea recta, verificando nuestra hipótesis. El resto de valores que resultan del cálculo de la recta de regresión, no tiene significado para nosotros.

4.2 COMANDO ESTIMACION LINEAL EN UNA VERSION ANTERIOR A OFFICE 365

En un **ajuste lineal con Excel**, la **hoja de cálculo nos da** directamente tanto los parámetros de la ecuación (**m** y **n**) como **sus errores**.

Si estamos utilizando **Excel** de una **versión anterior Office 365**, el siguiente ejemplo muestra cómo proceder:

Ejemplo: Utilizando el ejemplo mostrado en el párrafo 2. REPRESENTACIONES GRAFICAS CON EXCEL, calcularemos la ecuación del ajuste lineal y el error de sus parámetros mediante el comando **ESTIMACION.LINEAL** En Excel. Para hacerlo, debemos seguir **varios pasos**:

- **Seleccionamos un bloque vacío con tres filas y dos columnas** (6 celdas).
- En la barra de funciones escribimos “=” y del desplegable de su izquierda, seleccionamos la función “**ESTIMACION.LINEAL**”; es preferible seleccionar esta función del menú desplegable antes que escribirla.
- Se abre una nueva ventana y debemos ahora introducir en “Conocido_y” y “Conocido_x”, los rangos de celdas donde se encuentran los datos que queremos ajustar en ambos ejes. En “Constante” y “Estadística” debemos introducir “1” y “1”, y entonces (no pulsa Aceptar) debemos presionar al mismo tiempo “**Control**+“**Shift**+“**Enter**”. (Esto es muy importante, porque si no, no obtendrás el resultado esperado).
- En el bloque seleccionado debe aparecer

2,07289683	-0,41194924
0,06007301	0,22147765
0,99832311	0,18587688

La **primera fila** muestra los valores de la **pendiente (m)** del ajuste lineal y la **ordenada en el origen (n)**. La **segunda fila** nos da los **errores** de pendiente y ordenada en el origen

Entonces, el valor de la resistencia, después de redondear el error y la medida es:

$$R = 2,07 \pm 0,06 \text{ K}\Omega$$

Y el **primer valor de la tercera fila** nos da el **coeficiente de correlación** $R^2=0,998$ (cercano a 1) lo que significa que los puntos experimentales se alinean sobre una línea recta, verificando nuestra hipótesis. El resto de

Notar que, cuando se utiliza esta función, el error absoluto resultante no depende del error de las medidas experimentales; sólo la dispersión de medidas (si ellas se alinean o no sobre una línea recta) determina el error del ajuste lineal.

Por otro lado, si nos fijamos en el valor de la ordenada en el origen, $-0,41 \pm 0,22 \text{ V}$, no es probable que la línea de ajuste obtenida pase por el origen de coordenadas, lo que puede ser indicativo de que alguno de nuestros aparatos de medida esté descalibrado. Puede que nuestro voltímetro esté midiendo un voltaje menor que el real, o nuestro amperímetro mida más intensidad que la intensidad real.

