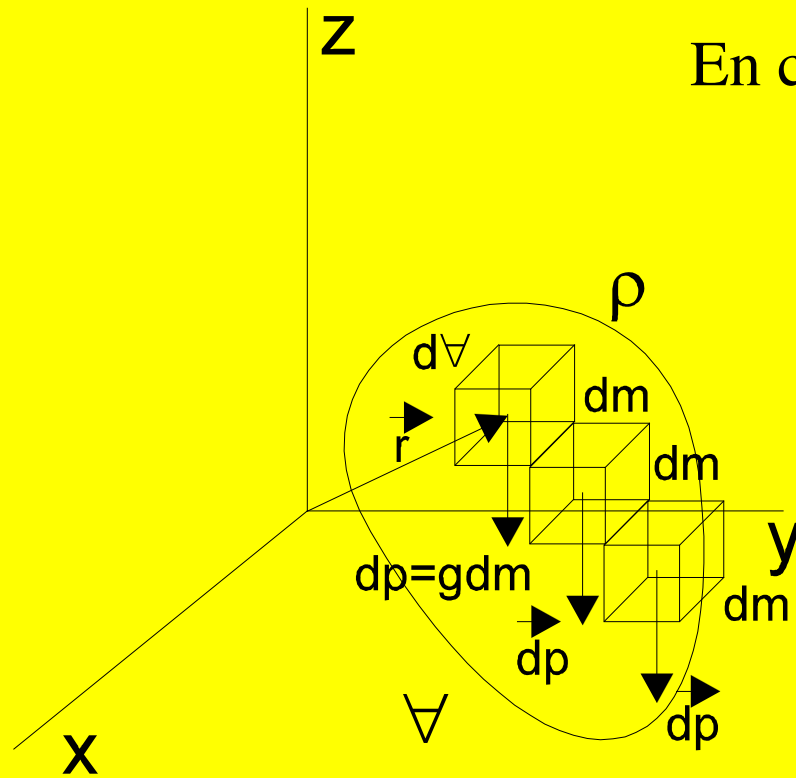


LECCION 3: EL SOLIDO RIGIDO

- **3.1.-Sólido rígido.**
- **3.2.-Centro de gravedad ó de masas.**
- **3.3.-Momentos de inercia. Radio de giro.**
- **3.4.-Teoremas de Steiner.**
- **3.5.-Productos de inercia.**

3.1.-SOLIDO RIGIDO



En cada dm : $\rho = \frac{dm}{dV}$ $d\vec{p} = gdm\vec{u}$
 ($\vec{u} = -\vec{k}$)

$$M = \int_V dm = \int_V \rho dV$$

$$\vec{P} = \int_V d\vec{p} = \int_V gdm\vec{u} = Mg\vec{u}$$

Si ρ cte: $\rho = \frac{M}{V}$

Todos los $d\vec{p}$ forman un sistema de vectores paralelos

3.1.-SOLIDO RIGIDO

- Si el sólido se reduce a una figura plana:

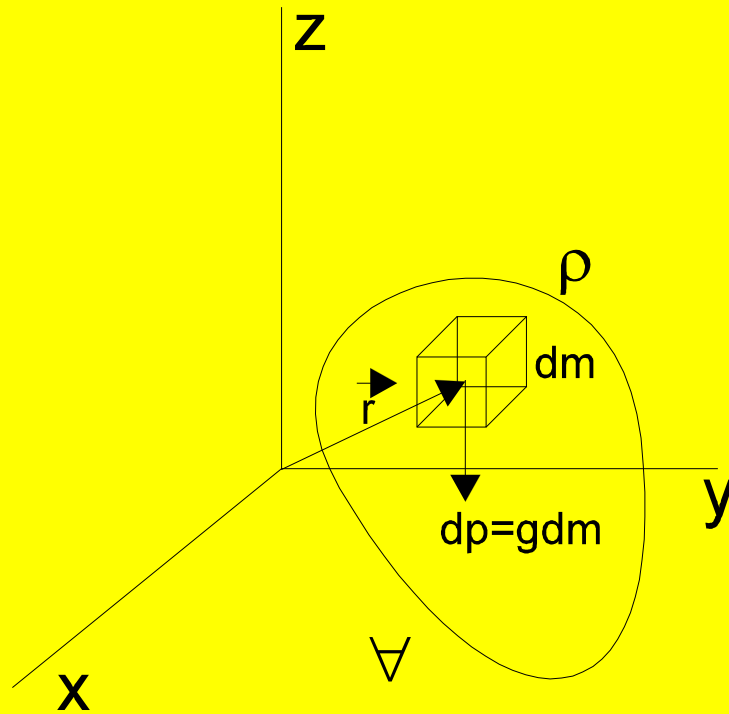
$$\rho = \frac{dm}{dS} \quad \text{Si } \rho \text{ cte: } \rho = \frac{M}{S}$$

- Si el sólido se reduce a una línea:

$$\rho = \frac{dm}{dl} \quad \text{Si } \rho \text{ cte: } \rho = \frac{M}{L}$$

3.2.-CENTRO DE GRAVEDAD O DE MASAS

Todos los dp forman un sistema de vectores paralelos



$$\vec{r}_G = \vec{OG} = \frac{\int_{\Delta} \vec{r} g dm}{\int_{\Delta} g dm} = \frac{\int_{\Delta} \vec{r} dm}{M} = \frac{\int_{\Delta} \vec{r} \rho d\Delta}{\int_{\Delta} \rho d\Delta}$$

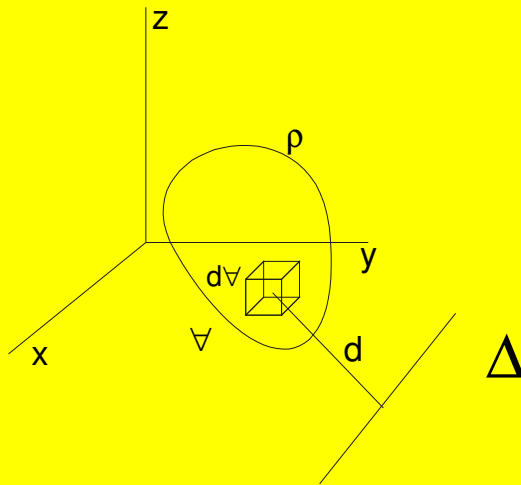


$$x_g = \frac{\int_{\Delta} x \rho d\Delta}{\int_{\Delta} \rho d\Delta} \quad y_g = \frac{\int_{\Delta} y \rho d\Delta}{\int_{\Delta} \rho d\Delta} \quad z_g = \frac{\int_{\Delta} z \rho d\Delta}{\int_{\Delta} \rho d\Delta}$$

$$x_g = \frac{\int_{\Delta} x d\Delta}{\Delta} \quad y_g = \frac{\int_{\Delta} y d\Delta}{\Delta} \quad z_g = \frac{\int_{\Delta} z d\Delta}{\Delta}$$

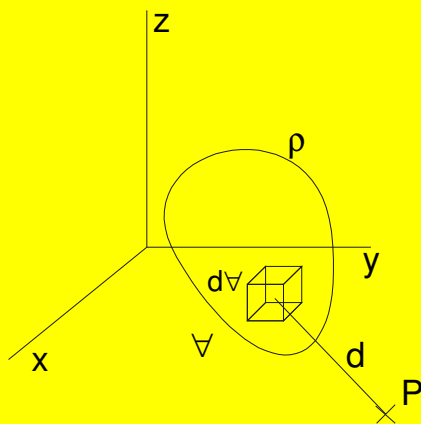
Si el sólido es homogéneo:
(ρ cte)

3.3.-MOMENTOS DE INERCIA



m.d.i. respecto de un eje:

$$I_{\Delta} = \int_V d^2 \rho dV$$

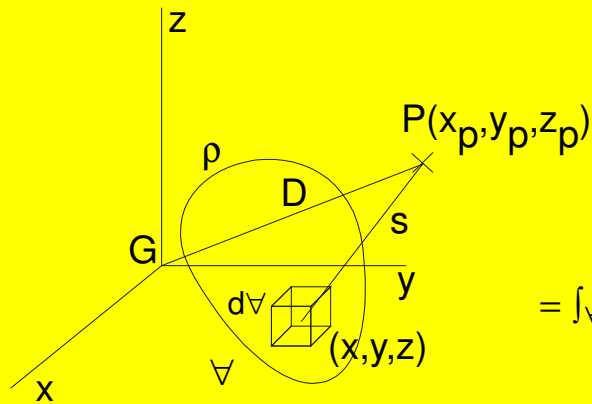


m.d.i. respecto de un punto:

$$I_P = \int_V d^2 \rho dV$$

LECCION 7: GEOMETRIA DE MASAS

7.4.-Teoremas de Steiner. 1º



$$I_P = \int_V s^2 \rho dV = \int_V \left[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (z_P - z)^2 \right] \rho dV =$$

$$= \int_V (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \rho dV + \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV - 2 \int_V (xx_P + yy_P + zz_P) \rho dV$$

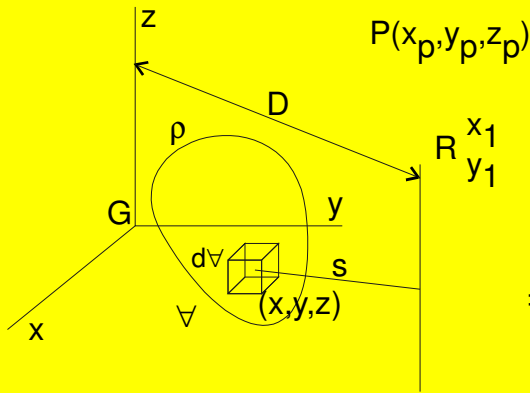
$$\int_V (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \rho dV = D^2 \int_V \rho dV = D^2 M$$

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV = I_G$$

$$\int_V (xx_P + yy_P + zz_P) \rho dV = x_P \int_V x \rho dV + y_P \int_V y \rho dV + z_P \int_V z \rho dV = 0$$

$$I_P = I_G + MD^2$$

3.4.-TEOREMAS DE STEINER



$$I_R = \int_V s^2 \rho dV = \int_V [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] \rho dV =$$

$$= \int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho dV + \int_V (x^2 + y^2) \rho dV - 2(x_1 \int_V x \rho dV + y_1 \int_V y \rho dV)$$

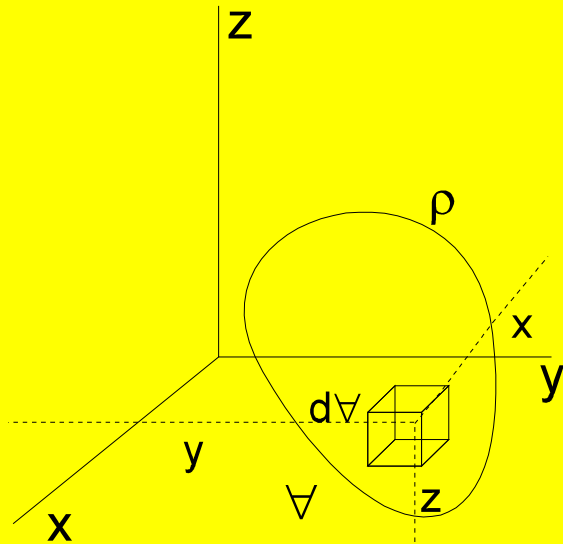
$$\int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho dV = MD^2$$

$$\int_V (x^2 + y^2) \rho dV = I_G$$

$$x_1 \int_V x \rho dV = y_1 \int_V y \rho dV = 0$$

$$\boxed{I_R = I_G + MD^2}$$

3.5: PRODUCTOS DE INERCIA



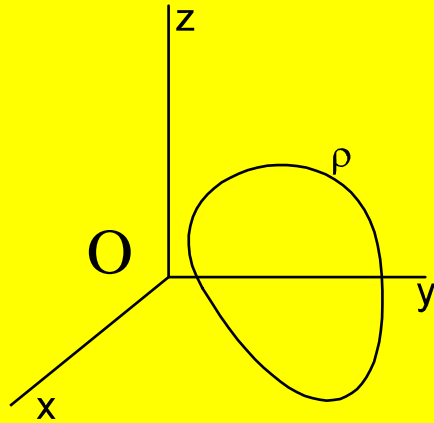
$$P_{xy} = \int_{\forall} xy\rho d\forall$$

$$P_{xz} = \int_{\forall} xz\rho d\forall$$

$$P_{yz} = \int_{\forall} yz\rho d\forall$$

Si alguno de los planos definido por los ejes x, y, z es plano de simetría del sólido, todos los productos de inercia en los que aparece dicho plano se anulan.

3.6.- LA MATRIZ DE INERCIA



Matriz de inercia respecto del sistema S

$$I_S = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix}$$

Si los ejes son principales y el sistema está situado en G, la matriz de inercia se denomina matriz central de inercia, y tiene el aspecto:

$$I_c = \begin{pmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{pmatrix}$$