

LECCIÓN 3. EL SÓLIDO RÍGIDO

- 3.1.-Sólido rígido.
- 3.2.-Centro de gravedad o de masas.
- 3.3.-Momentos de inercia. Radio de giro.
- 3.4.-Teoremas de Steiner.
- 3.5.-Productos de inercia.
- 3.6.-La matriz de inercia.

3.1. SÓLIDO RÍGIDO.

Como sólido rígido se entiende un cuerpo material en el que la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo se mantiene invariable, sea cual sea el sistema de fuerzas actuantes sobre el mismo. Es decir, un sólido rígido es un cuerpo cuya forma permanece invariable. La condición de indeformabilidad se expresa, formalmente, diciendo que si A y B son dos puntos cualesquiera de un sólido rígido, entonces

$$|\vec{AB}| = \text{cte}$$

El estudio del sólido rígido se hace descomponiendo el sólido en infinitas partículas infinitesimales, cada una de ellas de masa dm , y de volumen $d\forall$.

Se define la densidad de un sólido, ρ , como la masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{dm}{d\forall} \quad [\rho] = ML^{-3}$$

La densidad es una magnitud puntual, es decir, que en cada punto del sólido puede tener un valor distinto. No obstante, si el sólido es homogéneo ρ es cte, y se puede calcular como el cociente entre la masa total ($M = \int_{\forall} dm$) y el volumen total ($\forall = \int_{\forall} d\forall$) del sólido:

$$\rho = \frac{M}{\forall}$$

Si el sólido se reduce a una superficie, entonces la densidad se reduce a la masa por unidad de superficie, y hablamos de densidad superficial:

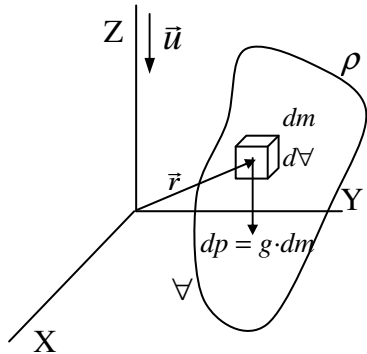
$$\rho = \frac{dm}{dS} \quad [\rho] = ML^{-2} \quad \text{Si } \rho \text{ es cte, } \rho = \frac{M}{S}$$

Y si el sólido se reduce a una línea, hablamos de densidad lineal:

$$\rho = \frac{dm}{dl} \quad [\rho] = ML^{-1} \quad \text{Si } \rho \text{ es cte, } \rho = \frac{M}{L}$$

3.2. CENTRO DE GRAVEDAD O DE MASAS.

Cada una de las partículas elementales en las que se descompone el sólido tendrá un peso de valor $dp=g \cdot dm$, que irá dirigido verticalmente hacia abajo. Si asociamos al sólido un sistema de referencia como el de la figura, y al vector unitario vertical en el sentido negativo del eje Z le llamamos \vec{u} , entonces:



$$d\vec{p} = g \cdot dm \vec{u}$$

La masa total del sólido será

$$M = \int_{\forall} dm = \int_{\forall} \rho d\forall$$

Y el peso total $\vec{P} = \int_{\forall} d\vec{p} = \int_{\forall} g \cdot dm \vec{u} = Mg \vec{u}$

El conjunto formado por todos los vectores $d\vec{p}$ constituye un sistema de vectores paralelos, cuya resultante es precisamente el peso del sólido, \vec{P} . Por ello, existe un punto, G, al que llamamos centro de gravedad ó centro de masas del sólido, y que tiene la propiedad de que al aplicar en él todo el peso del sólido, su comportamiento es análogo al de aplicar cada $d\vec{p}$ en su dm correspondiente.

La posición del punto G, dada por su vector de posición \vec{r}_G se puede calcular, tal y como vimos al estudiar los sistemas de vectores paralelos, con la expresión:

$$\vec{r}_G = \vec{OG} = \frac{\int_{\forall} \vec{r} g dm}{\int_{\forall} g dm} = \frac{\int_{\forall} \vec{r} dm}{M} = \frac{\int_{\forall} \vec{r} \rho d\forall}{\int_{\forall} \rho d\forall}$$

Esta expresión vectorial se puede descomponer en tres escalares, correspondientes a cada uno de los tres ejes coordenados:

$$x_g = \frac{\int_{\forall} x \rho d\forall}{\int_{\forall} \rho d\forall} \quad y_g = \frac{\int_{\forall} y \rho d\forall}{\int_{\forall} \rho d\forall} \quad z_g = \frac{\int_{\forall} z \rho d\forall}{\int_{\forall} \rho d\forall}$$

Si el sólido es homogéneo, ρ es constante, se puede simplificar, y queda:

$$x_g = \frac{\int_{\forall} x d\forall}{\forall} \quad y_g = \frac{\int_{\forall} y d\forall}{\forall} \quad z_g = \frac{\int_{\forall} z d\forall}{\forall}$$

En el caso de que el sólido sea una superficie o una línea, basta con sustituir los volúmenes por superficies o longitudes.

Y si el sólido homogéneo se puede descomponer en n partes, para cada una de las cuales conocemos la posición del c.d.g. (x_{gi}, y_{gi}, z_{gi}) respecto de un sistema de referencia común a las n partes, la posición del c.d.g. del sólido completo se puede calcular como si la masa de cada una de las n partes estuviera concentrada en el correspondiente c.d.g. Es decir:

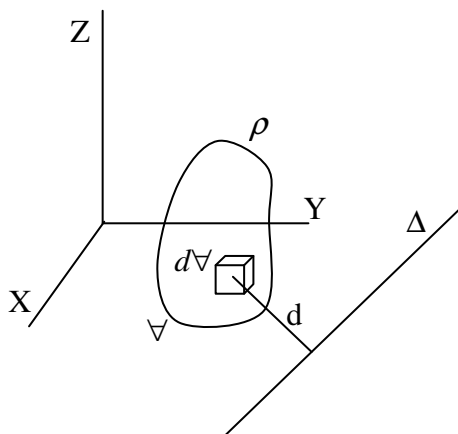
$$x_g = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{V_i} x dV}{\sum_{i=1}^n V_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{gi} V_i}{V}$$

Análogamente: $y_g = \frac{\sum_{i=1}^n y_{gi} V_i}{V}$ $z_g = \frac{\sum_{i=1}^n z_{gi} V_i}{V}$

A la hora de aplicar las ecuaciones anteriores, los volúmenes de cualquier agujero o recorte se pueden tratar como volúmenes negativos.

De la propia definición de c.d.g., si un cuerpo homogéneo presenta un eje de simetría, el c.d.g. está situado en dicho eje, y si presenta dos ejes de simetría, la intersección de ambos es el c.d.g.

3.3. MOMENTOS DE INERCIA. RADIO DE GIRO.



Se define el momento de inercia de un sólido respecto de un eje Δ , I_Δ , como:

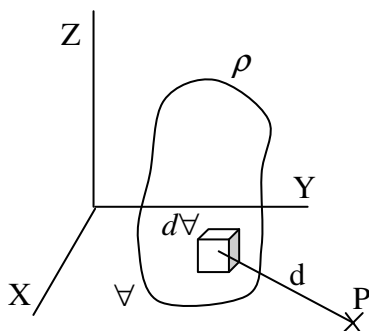
$$I_\Delta = \int_V d^2 \rho dV$$

Y momento de inercia respecto de un punto P:

$$I_P = \int_V d^2 \rho dV$$

De la propia definición de momento de inercia, se puede comprobar que:

$$I_P = (I_\Delta + I_{\Delta'} + I_{\Delta''})/2$$

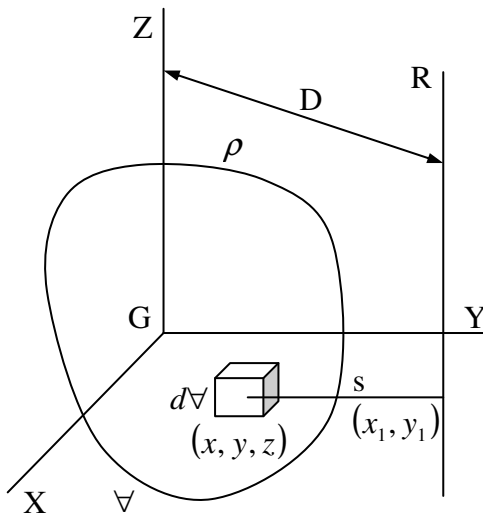


siendo P la intersección de tres ejes, Δ , Δ' , y Δ'' , perpendiculares entre sí.

Se denomina radio de giro de un sólido respecto de un eje a la distancia, respecto del eje, a la que habría que situar toda la masa del sólido para que su m.d.i. coincidiera con el m.d.i. del sólido. Es decir, si llamamos k al radio de giro de un sólido de masa M respecto de un eje D:

$$I_D = k^2 M \rightarrow k = (I_D/M)^{1/2}$$

3.4. TEOREMAS DE STEINER



Aunque existen varios de estos teoremas, tan sólo estudiaremos el relativo a ejes. Este teorema permite calcular el m.d.i. respecto de un eje a partir del m.d.i. de un sólido respecto de otro eje paralelo al primero.

En efecto, sea un sólido en cuyo c.d.g. colocamos, por simplicidad de cálculo, los ejes coordenados, y R una recta paralela al eje Z:

$$I_R = \int_V s^2 \rho dV = \int_V [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] \rho dV =$$

$$= \int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho dV + \int_V (x^2 + y^2) \rho dV - 2(x_1 \int_V x \rho dV + y_1 \int_V y \rho dV)$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho dV = MD^2 ; \int_V (x^2 + y^2) \rho dV = I_G ; x_1 \int_V x \rho dV = 0 \quad \text{y} \quad y_1 \int_V y \rho dV = 0 ,$$

ya que el c.d.g. coincide con el origen de coordenadas, resulta que

$$I_R = I_G + MD^2$$

En caso de que el c.d.g. no coincidiera con el origen, el resultado sería el mismo, ya que el m.d.i. respecto del c.d.g. es un invariante.

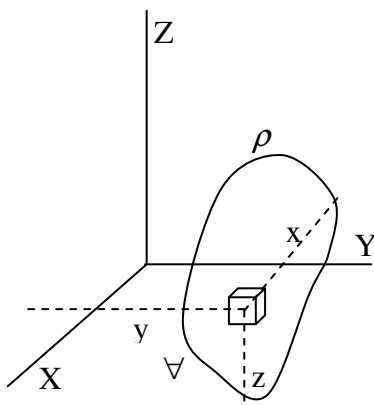
3.5. PRODUCTOS DE INERCIA

De forma análoga a la definición de momento de inercia de un sólido respecto de un eje, se define el producto de inercia de un sólido respecto de dos planos como la suma, para cada elemento diferencial de masa, del producto de las distancias del elemento diferencial a cada uno de los planos por la masa dm del elemento:

$$P_{xy} = \int_V xyp dV$$

$$P_{xz} = \int_V xzpdV$$

$$P_{yz} = \int_V yzpdV$$



Si alguno de los planos definido por los ejes x, y, z es plano de simetría del sólido, es evidente que todos los productos de inercia en los que aparece dicho plano se anulan. Y si dos de los planos coordenados son planos de simetría, entonces los tres productos de inercia se anulan.

3.6. LA MATRIZ DE INERCIA

Dado un sólido rígido y un sistema de referencia S situado en un punto O y ligado a él, se define su matriz de inercia como la matriz I_S que se forma, a partir de los momentos y productos de inercia respecto de los ejes y planos coordenados, del siguiente modo:

$$I_S = \begin{pmatrix} I_X & -P_{XY} & -P_{XZ} \\ -P_{YX} & I_Y & -P_{YZ} \\ -P_{ZX} & -P_{ZY} & I_Z \end{pmatrix}$$

Evidentemente, la matriz de inercia depende tanto del punto O donde hayamos situado el sistema de referencia, como de la orientación de dicho sistema; pero fijado un punto O, es posible que exista una orientación de los ejes tal que la matriz de inercia sea diagonal, y tales ejes se denominan ejes principales de inercia del sólido rígido. Los ejes de simetría de un sólido, si los hay, son ejes principales de inercia. Los vectores unitarios de los ejes principales se corresponden con los autovectores o vectores propios de una matriz, y los momentos de inercia correspondientes, con los autovalores o valores propios.

Así pues, si elegimos un sistema de referencia tal que dos de sus planos coordenados sean planos de simetría, los ejes elegidos serán principales de inercia, y la matriz de inercia será diagonal, que es la forma más simple de trabajar, teniendo el aspecto:

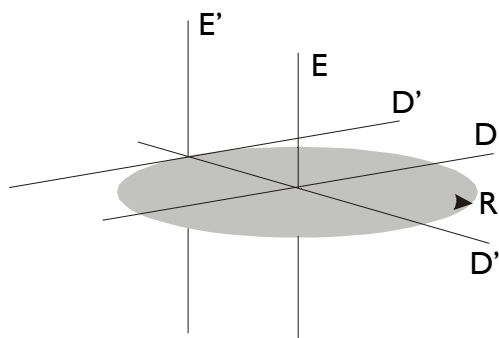
$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Si además de trabajar en un sistema de referencia cuyos ejes sean principales de inercia, dicho sistema está situado en el centro de gravedad del sólido, entonces la matriz se llama matriz central de inercia.

Ejercicio:

Dado un disco de radio R y masa M, y conocidos los momentos de inercia de dicho disco respecto de un eje E perpendicular al mismo y que pase por su centro, y respecto de un diámetro D, calcular la matriz de inercia

- Respecto del sistema de referencia S formado por los ejes D'' (X), D' (Y) y E' (Z)
- la matriz central de inercia respecto de los ejes D'', D y E



Supongamos que hemos calculado los momentos de inercia del disco respecto de E y respecto de D, resultando:

$$I_E = \frac{1}{2}MR^2 \qquad I_D = \frac{1}{4}MR^2$$

a) Aplicando el teorema de Steiner resulta:

$$I_{E'} = \frac{3}{2}MR^2 \qquad I_{D'} = \frac{5}{4}MR^2$$

Y como, además, $I_{D''} = I_D$ y el sistema de referencia S presenta dos planos de simetría, resulta

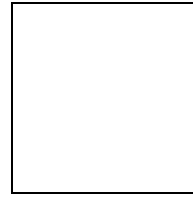
$$I_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}MR^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

c) Y la matriz central de inercia, respecto de los ejes D'', D y E:

$$I_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}MR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

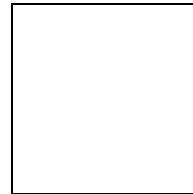
EJERCICIOS LECCION 3: EL SOLIDO RIGIDO

3.1- Determinar el c.d.g. de un tronco de cono de revolución, homogéneo, de altura H y radio de la base R.



Solución: $Z_G = \frac{3}{4}H$

3.2- Determinar la posición del c.d.g. de la figura formada por un cuadrado de lado a, sobre uno de cuyos lados, como diámetro y exteriormente a él, hay un semicírculo, tal y como se muestra en la figura. Repetir el problema cuando el semicírculo es interior.



Solución: a) $Y_G = \frac{\frac{14}{8 + \pi} + \pi}{3} a$ b) $Y_G = \frac{\frac{14}{8 - \pi} - \pi}{3} a$

3.3- Calcular la posición del c.d.g. de un arco de circunferencia de radio R y ángulo central 2α . Aplicar este resultado a la obtención del c.d.g. del cuadrante y de la semicircunferencia del mismo radio R.

Solución:

a) $X_G = \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ b) $X_G = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$ c) $X_G = \frac{2R}{\pi}$.

3.4- Calcular el m.d.i. de una varilla homogénea de longitud a y masa m, respecto de un eje perpendicular a ella y que pase por uno de sus extremos. Como aplicación de los teoremas de Steiner, calcular el m.d.i. de la varilla respecto de un eje paralelo al anterior y que pase por el c.d.g. En este último caso, calcular el radio de giro.

Solución: a) $I = \frac{1}{3}ma^2$ b) $I' = \frac{1}{12}ma^2$ $k = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

3.5- Determinar el m.d.i. de un círculo de masa m y radio R, a) respecto de su centro, b) un eje perpendicular al disco y que pase por su centro, c) un diámetro, d) repetir el primer punto de este problema si, a una distancia R/2 del centro, y sobre la superficie del disco, se coloca una masa puntual de masa 2m.

Solución:

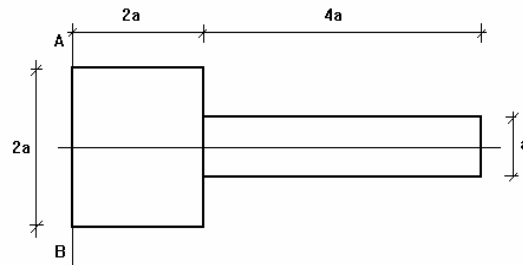
a) $I_O = \frac{1}{2}mR^2$ b) $I_e = I_O = \frac{1}{2}mR^2$ c) $I_D = \frac{1}{4}mR^2$

d) $I'_O = \frac{1}{2}mR^2 + 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2$

3.6- Calcular el m.d.i. de un cilindro homogéneo de radio R, altura H, y masa M respecto de su eje.

Solución:
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

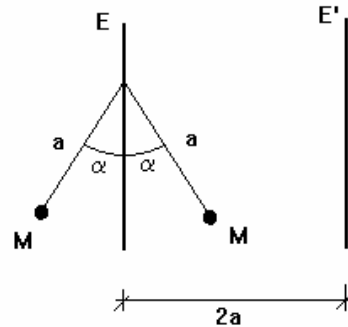
3.7- Calcular el c.d.g. de la figura plana representada, y el m.d.i. respecto del eje AB. Se supone que la figura es homogénea, de masa total M.



Solución: $Y_G = 0$ y $X_G = \frac{5a}{2}$

$$I_{AB} = \frac{28}{3}Ma^2 \quad k = \sqrt{\frac{I_{AB}}{M}} = a\sqrt{\frac{28}{3}}$$

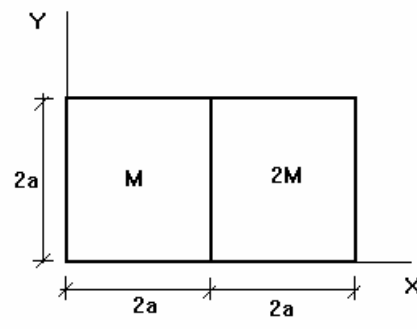
3.8- Dos masas de dimensiones despreciables, de masa M cada una, están unidas a un eje E, alrededor del cual giran, mediante dos brazos de longitud a y masa despreciable, tal y como se indica en la figura.



- a) Calcular, en función de α , el m.d.i. del conjunto respecto de E.
- b) Idem respecto de E'.

Solución: a) $I_E = 2M(a \text{ sen } \alpha)^2$
 b) $I_{E'} = 2Ma^2(4 + \text{sen}^2 \alpha)$

3.9- Se tienen dos cuadrados de lado 2a, de idénticas dimensiones, pero la masa de uno es el doble de la del otro. Calcular la posición del c.d.g. del conjunto de ambos cuadrados en el sistema de referencia de la figura.



Solución:

a) $Y_G = a$
$$X_G = \frac{aM + 3a2M}{3M} = \frac{7a}{3}$$