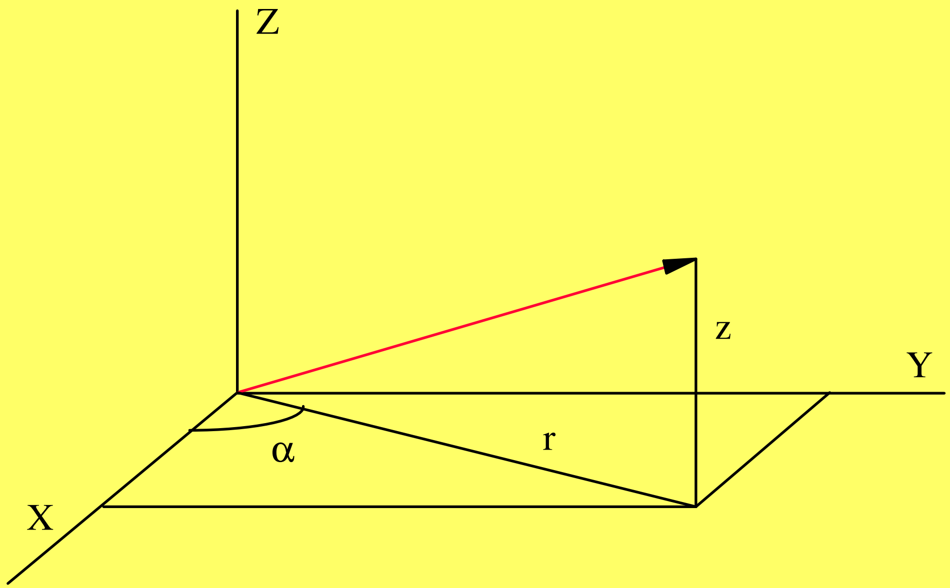
LECCION 4: SISTEMAS DE REFERENCIA

- 4.1. Introducción.
- 4.2. Otros sistemas de coordenadas.
  - 4.2.1. Coordenadas cilíndricas.
  - 4.2.2. Coordenadas esféricas.
- 4.3. El sistema de referencia del robot.
  - 4.3.1. Introducción. El problema directo.
  - 4.3.2 Matrices de rotación.
  - 4.3.3. Matriz de transformación homogénea.
  - 4.3.4. Elementos, articulaciones y sus parámetros.

4.2. OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

COORDENADAS CILÍNDRICAS.



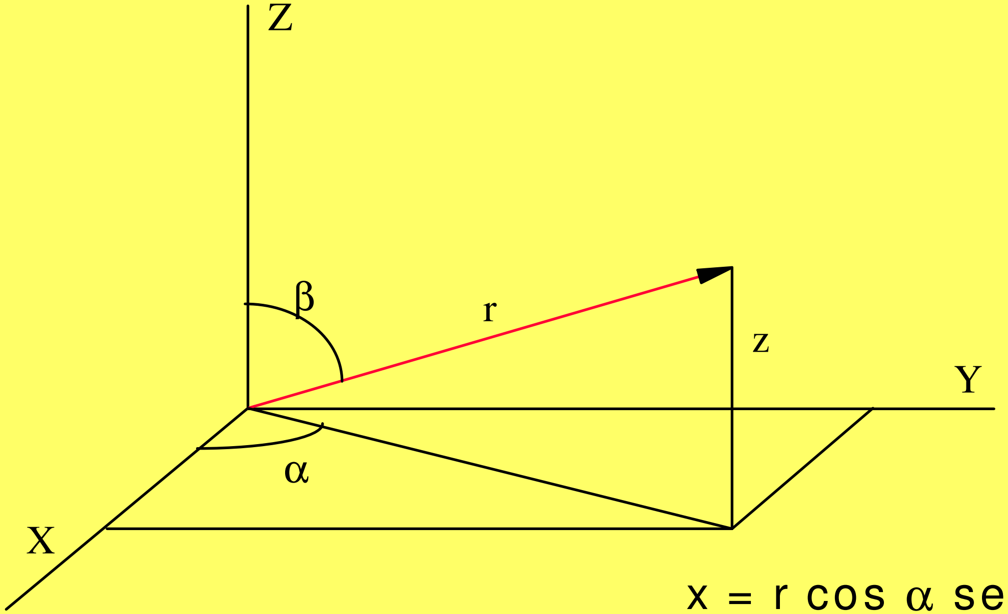
$x = r\cos\alpha \qquad \alpha = \operatorname{arctag} y/x$

$y = r\operatorname{sen}\alpha \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = z \qquad z = z$

4.2. OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

COORDENADAS ESFERICAS.



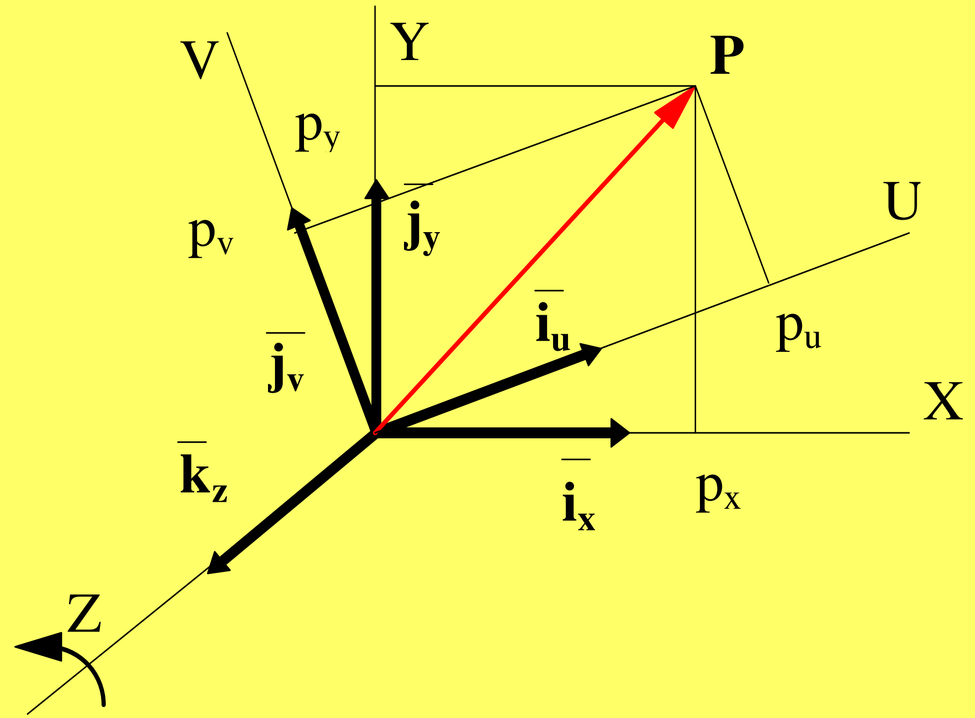
$$x = r \cos \alpha \,\mathrm{sen}\beta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\, \mathrm{sen}\alpha \,\mathrm{sen}\beta \qquad \alpha = \mathrm{arctag}\ y/x$$

$$z = r \cos \beta \qquad \beta = \mathrm{arctag}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

4.3. EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL ROBOT

MATRICES DE ROTACION



$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{xyz}} = p_x \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} + p_y \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} + p_z \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{uvw}} = p_u \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + p_v \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} + p_w \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}}$$

MATRICES DE ROTACION

$$\vec{\mathbf{p}} = p_x \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} + p_y \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} + p_z \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} = p_u \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + p_v \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} + p_w \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}}$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} = p_x = \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot (p_u \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + p_v \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} + p_w \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}}) \\ \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} = p_y = \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot (p_u \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + p_v \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} + p_w \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}}) \\ \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{z}} = p_z = \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot (p_u \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + p_v \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} + p_w \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}}) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix}$$

$$(U,V,W) \xrightarrow{\mathbf{R}} (X,Y,Z)$$

MATRICES DE ROTACION

MATRIZ DE GIRO

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}}_x \cdot \vec{\mathbf{i}}_u & \vec{\mathbf{i}}_x \cdot \vec{\mathbf{j}}_v & \vec{\mathbf{i}}_x \cdot \vec{\mathbf{k}}_w \\ \vec{\mathbf{j}}_y \cdot \vec{\mathbf{i}}_u & \vec{\mathbf{j}}_y \cdot \vec{\mathbf{j}}_v & \vec{\mathbf{j}}_y \cdot \vec{\mathbf{k}}_w \\ \vec{\mathbf{k}}_z \cdot \vec{\mathbf{i}}_u & \vec{\mathbf{k}}_z \cdot \vec{\mathbf{j}}_v & \vec{\mathbf{k}}_z \cdot \vec{\mathbf{k}}_w \end{pmatrix}$$

componentes de i_x en OUVW

componentes de j_y en OUVW

componentes de k_z en OUVW

componentes de i_u en OXYZ

componentes de j_v en OXYZ

componentes de k_w en OXYZ

MATRICES DE ROTACION

MATRIZ DE GIRO

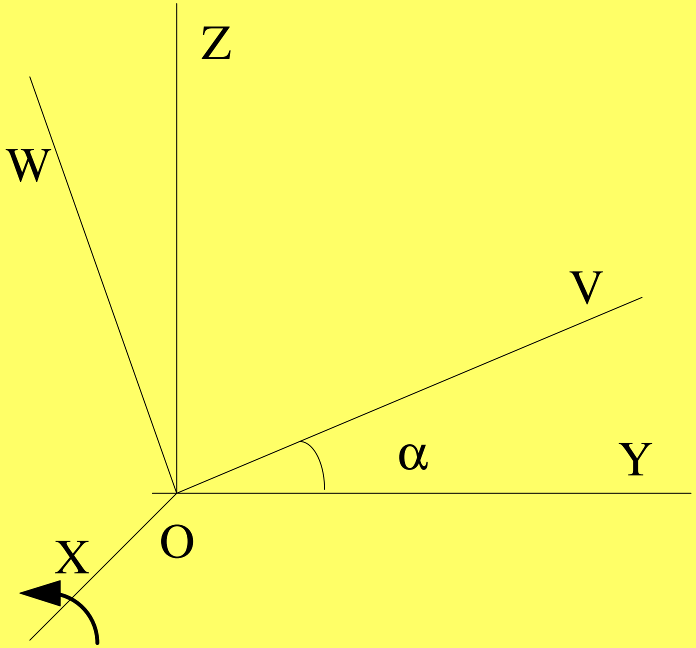
$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}}_x \cdot \vec{\mathbf{i}}_u & \vec{\mathbf{j}}_y \cdot \vec{\mathbf{i}}_u & \vec{\mathbf{k}}_z \cdot \vec{\mathbf{i}}_u \\ \vec{\mathbf{i}}_x \cdot \vec{\mathbf{j}}_v & \vec{\mathbf{j}}_y \cdot \vec{\mathbf{j}}_v & \vec{\mathbf{k}}_z \cdot \vec{\mathbf{j}}_v \\ \vec{\mathbf{i}}_x \cdot \vec{\mathbf{k}}_w & \vec{\mathbf{j}}_y \cdot \vec{\mathbf{k}}_w & \vec{\mathbf{k}}_z \cdot \vec{\mathbf{k}}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{t}$$

$$(X,Y,Z) \xrightarrow{\mathbf{Q}} (U,V,W)$$

MATRICES DE ROTACION BASICAS

- MATRIZ DE GIRO RESPECTO DE OX (α)

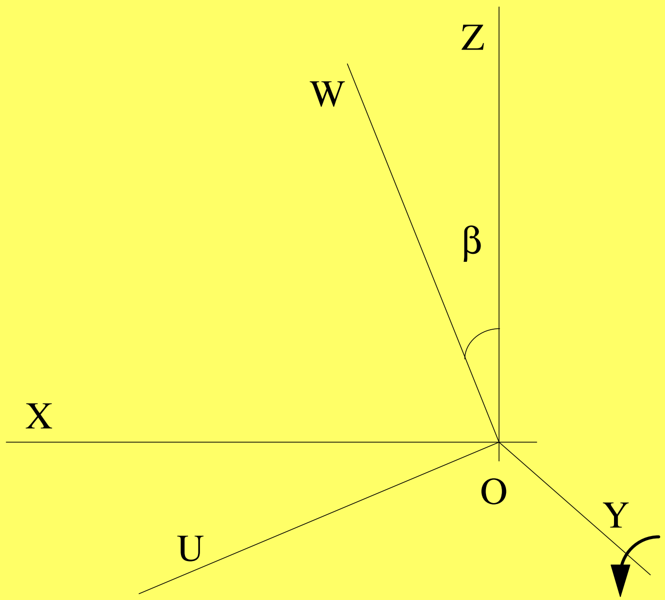


$$R = \begin{pmatrix} \vec{i}_x \cdot \vec{i}_u & \vec{i}_x \cdot \vec{j}_v & \vec{i}_x \cdot \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \cdot \vec{i}_u & \vec{j}_y \cdot \vec{j}_v & \vec{j}_y \cdot \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \cdot \vec{i}_u & \vec{k}_z \cdot \vec{j}_v & \vec{k}_z \cdot \vec{k}_w \end{pmatrix}$$

$$\vec{i}_x \equiv \vec{i}_u \Rightarrow \quad R_X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

MATRICES DE ROTACION BASICAS

- MATRIZ DE GIRO RESPECTO DE OY (β)

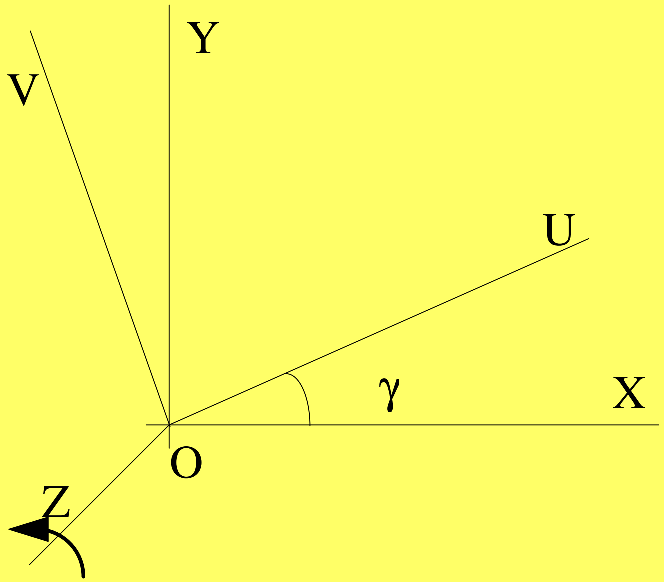


$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{i}}_{Y} \equiv \vec{\mathbf{i}}_{V} \Rightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{Y}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

MATRICES DE ROTACION BASICAS

- MATRIZ DE GIRO RESPECTO DE OZ (γ)

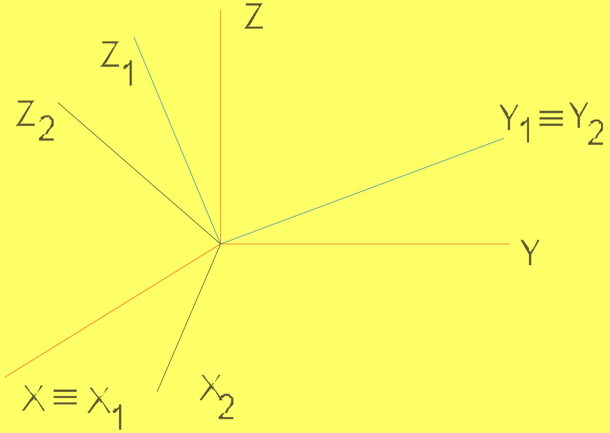


$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} & \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{v}} & \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}} \equiv \vec{\mathbf{i}}_{\mathrm{w}} \Rightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE ROTACION COMPUESTA

- Si se producen dos giros sucesivos alrededor de los ejes ya girados :



$$\vec{\mathbf{p}}_{xyz} = {}^{0}R_{1}\vec{\mathbf{p}}_{x_1y_1z_1}$$

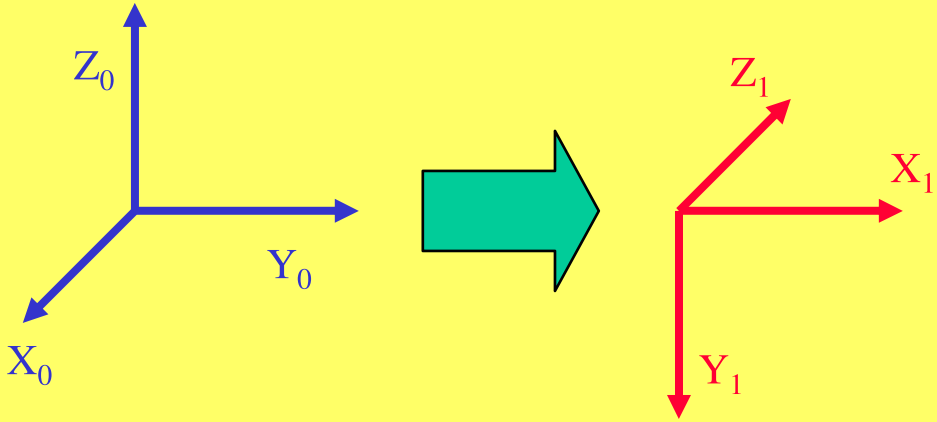
$$\vec{\mathbf{p}}_{x_1y_1z_1} = {}^{1}R_{2}\vec{\mathbf{p}}_{x_2y_2z_2}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{xyz} = {}^{0}R_{1}\,{}^{1}R_{2}\vec{\mathbf{p}}_{x_2y_2z_2}$$

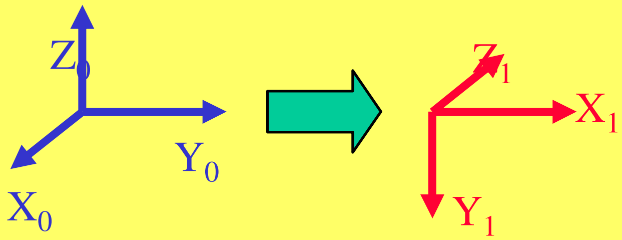
$${}^{0}R_{2} = {}^{0}R_{1}\,{}^{1}R_{2}$$

MATRIZ DE ROTACION COMPUESTA

- EJEMPLO: Obtener la matriz de rotación que permite transformar componentes de vectores entre los sistemas de referencia azul (0) y rojo (1):



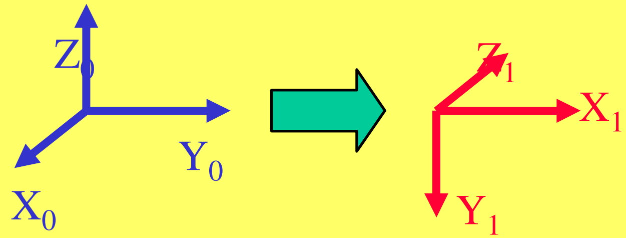
- La matriz que convierte componentes de un sistema de referencia en otro se puede obtener de dos formas distintas:
  - a) Escribiendo directamente la matriz
  - b) Aplicando giros sucesivos y calculando la matriz de rotación compuesta



- a) Escribiendo directamente la matriz de rotación:
  - Si tenemos en cuenta cuáles son las columnas de la matriz de rotación (componentes de los unitarios del sistema girado escritas en el sistema original, la matriz de rotación, que llamaremos ${}^{0}R_{1}$ será:

$$
{}^{0}R_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

- b) Aplicando giros sucesivos:

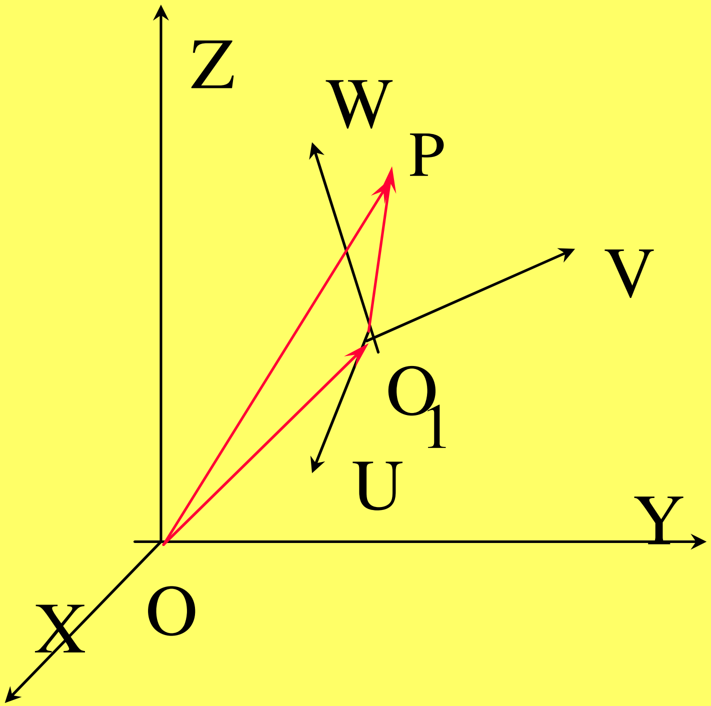


  - La transformación desde el sistema 0 hasta el 1 se puede conseguir aplicando dos giros sucesivos:
    - 1.- Giro de 90º alrededor del eje Z.
    - 2.- Giro de -90º alrededor del nuevo eje X.
  - Así, si escribimos las respectivas matrices de rotación básicas, llamando 0' al sistema resultante del primer giro:

$$ {}^{0}R_{0'} = R_Z(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{0'}R_1 = R_X(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

Y la matriz resultante: $ {}^{0}R_1 = {}^{0}R_{0'}\,{}^{0'}R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $

MATRIZ DE TRANSFORMACION HOMOGENEA



$$\overrightarrow{OP}_{XYZ} = \overrightarrow{O_1P}_{XYZ} + \overrightarrow{OO_1}_{XYZ}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = {}^{XYZ}R_{UVW} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} OO_{1_X} \\ OO_{1_Y} \\ OO_{1_Z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & OO_{1_x} \\ n_y & s_y & a_y & OO_{1_y} \\ n_z & s_z & a_z & OO_{1_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p}_{xyz} = T\vec{p}_{uvw}}$$

$$\boxed{\vec{p}_{uvw} = T^{-1}\vec{p}_{xyz}}$$

MATRIZ DE TRANSFORMACION HOMOGENEA

$$T = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & OO_{1x} \\ n_y & s_y & a_y & OO_{1y} \\ n_z & s_z & a_z & OO_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

coordenadas del origen O_1 respecto de O

componentes de i_u en OXYZ $\vec{n}$

componentes de i_v en OXYZ $\vec{s}$

componentes de i_w en OXYZ $\vec{a}$

MATRICES DE ROTACION HOMOGENEAS BASICAS

- Giro de valor α en torno al eje X (sin traslación):

$$\mathbf{T}_{\mathbf{X}}(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Giros β y γ en torno a Y y Z (sin traslación):

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Y}}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_{\mathbf{Z}}(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 & 0\\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSFORMACION HOMOGENEA INVERSA

$$T = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & OO_{1_x} \\ n_y & s_y & a_y & OO_{1_y} \\ n_z & s_z & a_z & OO_{1_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{n}^{\,t}\,\overrightarrow{OO_1} \\ s_x & s_y & s_z & -\vec{s}^{\,t}\,\overrightarrow{OO_1} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{a}^{\,t}\,\overrightarrow{OO_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ELEMENTOS Y ARTICULACIONES

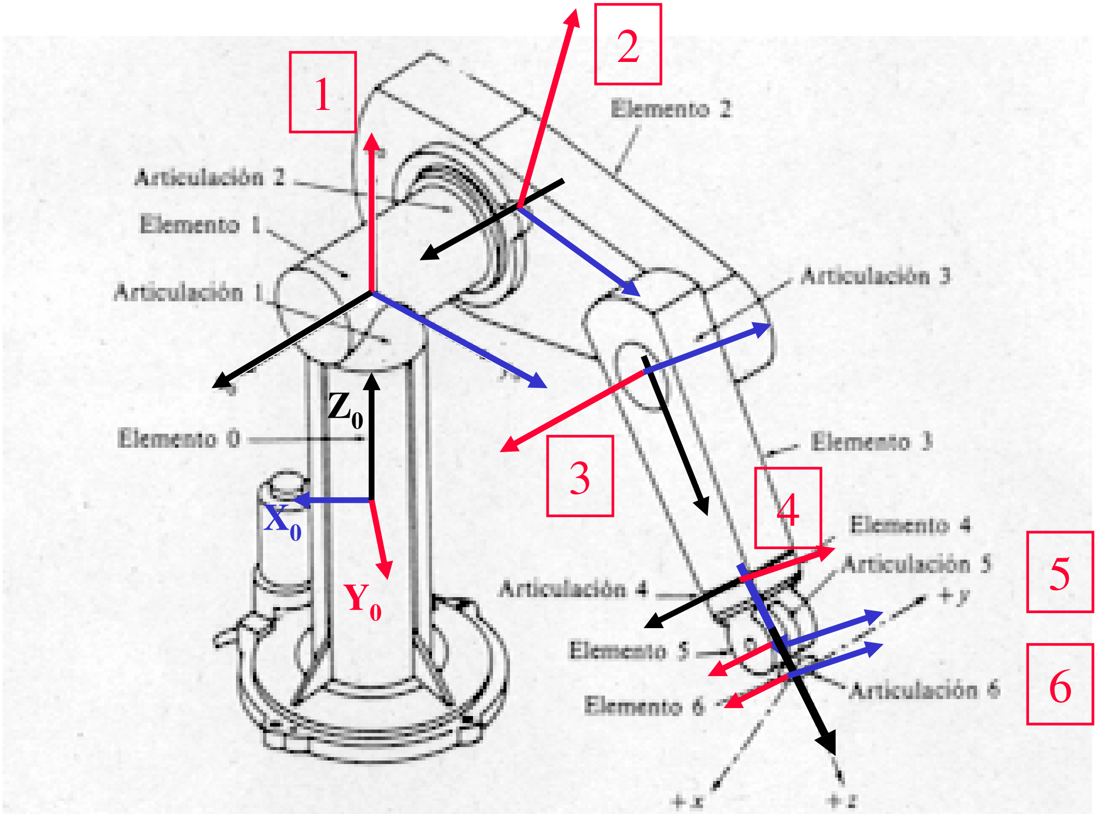
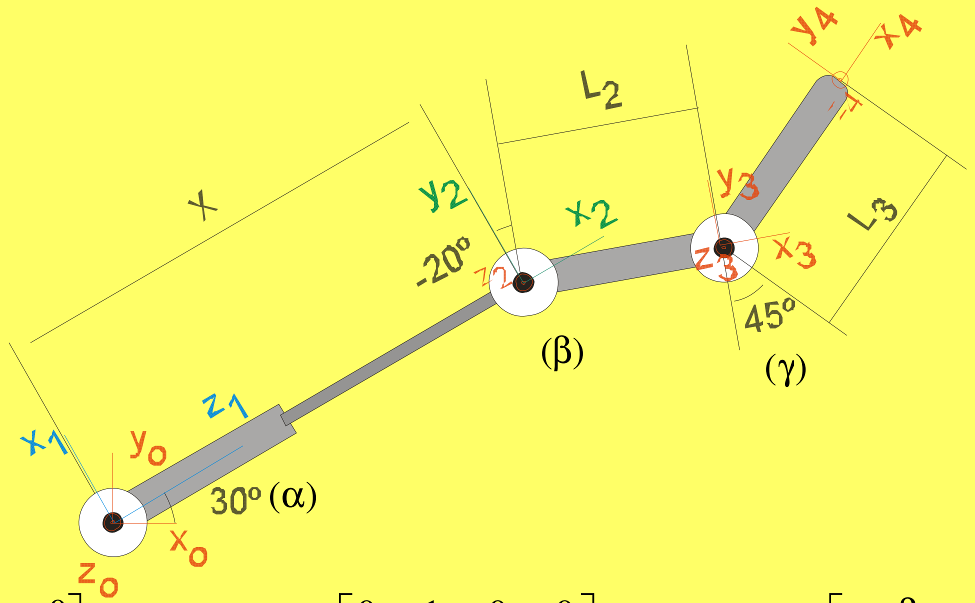


Figura 2.8 Un robot PUMA ilustrando articulaciones y elementos.

eje X
eje Y
eje Z

EJEMPLO: BRAZO CON 3 ART. GIRATORIAS Y 1 PRISMATICA



$$^{0}A_{1}=\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_{2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_{3}=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 & L_2\cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 & L_2\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}A_{4}=\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 & L_3\cos\gamma \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & L_3\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^{0}A_{4}={}^{0}A_{1}\,{}^{1}A_{2}\,{}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}}$$

EJEMPLO: BRAZO CON 3 ART. GIRATORIAS Y 1 PRISMATICA matrices inversas

$$^{0}A_{1} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_{0} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}A_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

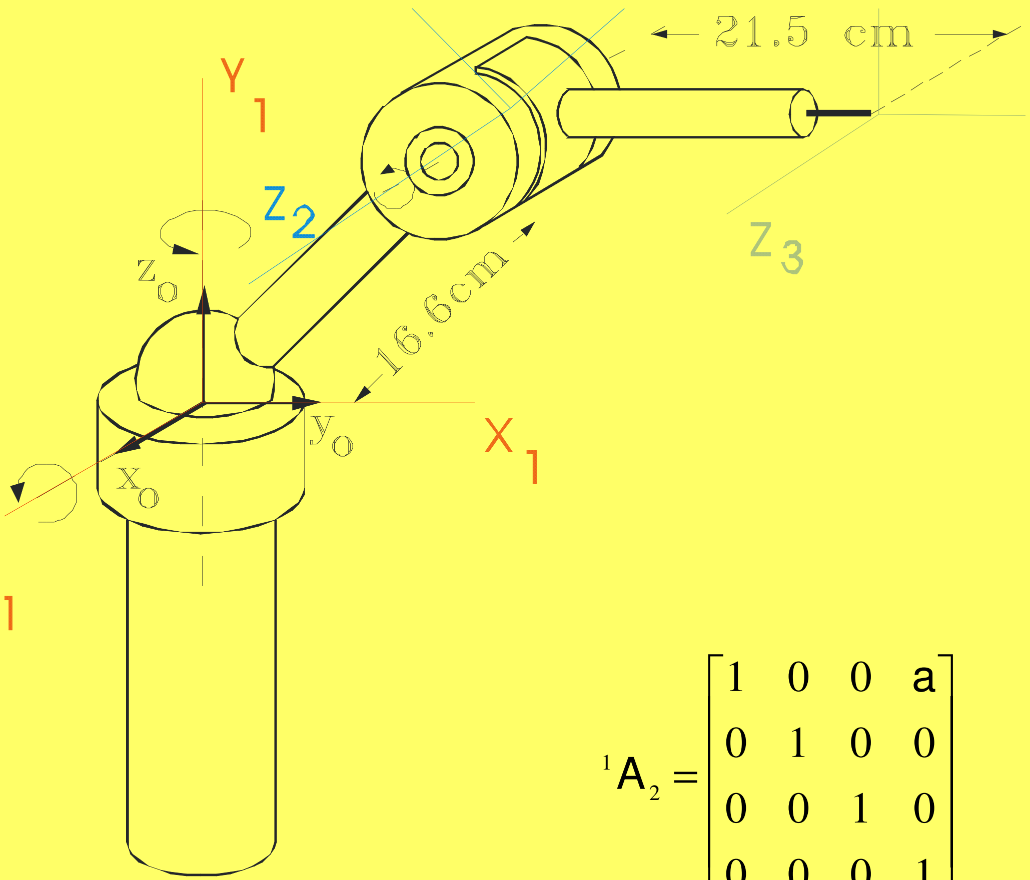
$$^{2}A_{3} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 & L_2\cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 & L_2\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}A_{2} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 0 & -L_2 \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}A_{4} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 & L_3\cos\gamma \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & L_3\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{4}A_{3} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 & -L_3 \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO: BRAZO CON 1 ART. DOBLE (ROTULA)



$$ {}^{0}A_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}A_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}A_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$