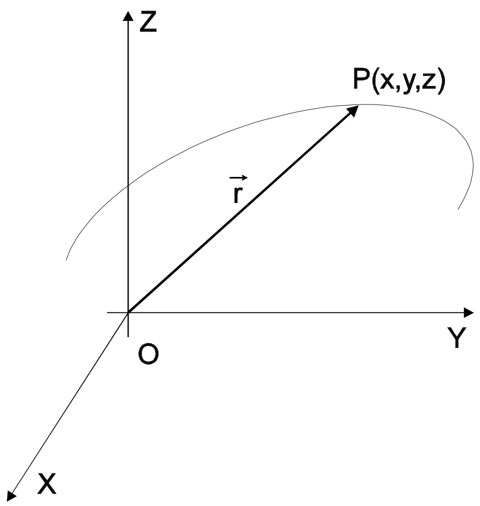
LECCIÓN 5: CINEMÁTICA DEL PUNTO

5.1. PUNTO MATERIAL.

Un punto material representa cuerpos con masa pero sin dimensiones. De esta forma, su posición queda completamente definida con las coordenadas del punto en el que se encuentra. Muchos sistemas reales pueden asimilarse a puntos materiales si la escala de dimensiones lo permite sin introducir error (la tierra, girando alrededor del sol, puede estudiarse como un punto material).

5.2. VECTOR DE POSICIÓN. TRAYECTORIA.

Un punto material situado en el espacio en el punto P, respecto del sistema de referencia [O,X,Y,Z], tiene por coordenadas P(x,y,z). Vector posición del punto material se define como el vector que va del origen de coordenadas hasta P; $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Sus componentes serán:



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Si el punto se mueve en el espacio, las coordenadas variarán con el tiempo, y el vector posición será una función vectorial de la variable escalar tiempo:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

De esta manera, la trayectoria que siga el punto será la curva indicatriz que describe el extremo del vector posición a lo largo del tiempo.

5.3. VECTOR VELOCIDAD.

Se define el vector velocidad como la derivada respecto del tiempo del vector de posición:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

De la definición de derivada se deduce que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, y su sentido es el de avance del punto material. Si llamamos $\vec{T}$ al vector unitario tangente a la trayectoria y en el sentido de la velocidad, será

$$\vec{v}(t) = v\vec{T}$$

donde v es el módulo del vector velocidad, la llamada velocidad lineal,

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|.$$

5.4. VECTOR ACELERACIÓN.

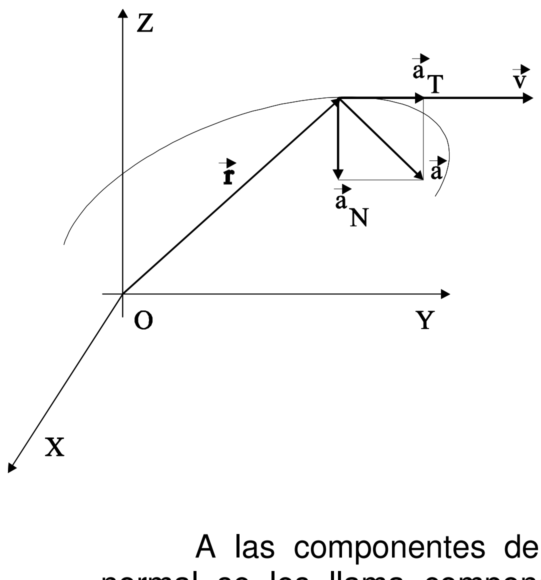
Se define el vector aceleración como la derivada respecto del tiempo del vector velocidad:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Como $\vec{v}(t) = v\vec{T}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$$

Como $\vec{T}$ es unitario por definición, su módulo es constante, por lo que el vector $\frac{d\vec{T}}{dt}$ es perpendicular a $\vec{T}$. Al unitario (o versor) en la dirección y sentido de $\frac{d\vec{T}}{dt}$ se le llama vector normal, $\vec{N}$



$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

Si definimos el radio de curvatura de un arco como $\rho = \frac{v}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$, resulta que

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

A las componentes de la aceleración en las direcciones tangente y normal se les llama componentes intrínsecas de la aceleración. El primer término, o aceleración tangencial va en la dirección tangente a la trayectoria, y su módulo representa los cambios en el módulo de la velocidad instantánea. El segundo término, la llamada aceleración normal, es siempre normal a la trayectoria, y está relacionada con los cambios de dirección del vector velocidad.

5.5. ALGUNOS TIPOS DE MOVIMIENTOS.

*** Movimiento rectilíneo**

El radio de curvatura de la trayectoria es infinito, por lo que la aceleración normal será nula, $\vec{a}_N = 0$, y por lo tanto la velocidad y la aceleración irán en la dirección de la trayectoria, dirección del vector tangente.

*** Movimiento plano**

Al encontrarse siempre en el mismo plano, los vectores tangente y normal estarán contenidos en él, y su producto vectorial dará como resultado un vector unitario, que será constante, al que se llama vector binormal $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

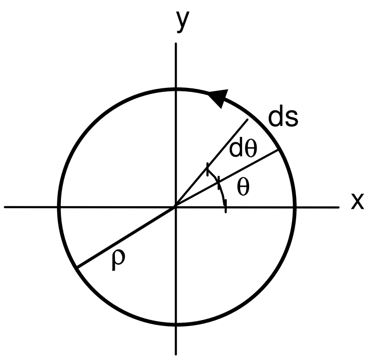
*** Movimiento uniforme**

Se dice de aquel movimiento cuya velocidad lineal es constante, y por lo tanto su aceleración tangencial es nula: v = cte, a_T=0, por lo que solo tiene aceleración normal

*** Movimiento uniformemente variado**

Se dice del movimiento en el que su velocidad varía uniformemente, es decir, su aceleración tangencial es constante a_T=cte

*** Movimiento circular**



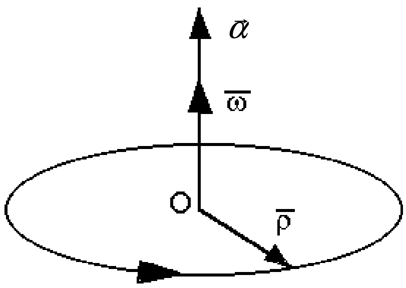
Es un movimiento plano de radio de curvatura constante, ρ=constante, cuya trayectoria, por lo tanto, es circular. En este tipo de movimiento se definen variables particulares, expresando las velocidades y aceleraciones en términos de ángulos recorridos, θ. De esta forma, las coordenadas de un punto de la trayectoria serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta(t) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \end{aligned}\right\}$$

Se define la velocidad angular ω, como el ángulo girado por unidad de tiempo, $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Como el arco recorrido es $ds = \rho d\theta$, la velocidad lineal la podremos expresar como:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\rho d\theta)}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt} = \rho\omega(t)$$



Si definimos el vector velocidad angular como un vector cuyo módulo es la velocidad angular anteriormente definida, dirección normal a la trayectoria, y sentido el de aplicar la regla de la mano derecha al movimiento circular (criterio dextrógiro), se puede escribir:

$$\vec{v} = \rho\omega\vec{T} = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

donde $\vec{\rho}$ es el vector posición del punto material considerando el centro del movimiento como origen de coordenadas.

Por analogía, se define el vector aceleración angular como un vector de módulo la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo,

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

dirección normal al plano de la trayectoria, y sentido el de la velocidad angular.

Se cumple que $a_T = \frac{d(\rho\omega)}{dt} = \rho\alpha$, y se puede comprobar que:

$$\vec{\mathbf{a}}_T = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \vec{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{a}}_N = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{\rho}})$$

Podremos también, particularizando para el movimiento circular, señalar las características de dos tipos de movimientos:

- Movimiento circular uniforme

Velocidad angular constante, y por lo tanto aceleración angular nula $\alpha=0$. En este caso se definen dos magnitudes características:

-Periodo: Tiempo que tarda el punto material en completar un ciclo: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

-Frecuencia: Número de ciclos que describe el punto por unidad de tiempo: $f = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$

- Movimiento circular uniformemente variado

En él la velocidad angular varía uniformemente, y por lo tanto la aceleración angular es constante: α=constante.

EJERCICIOS LECCION 5.- CINEMÁTICA DEL PUNTO

5.1- Una partícula sigue la trayectoria siguiente, expresada en forma paramétrica en función del tiempo:

$$x = 2t \qquad y = t^2 + 2 \qquad z = 1$$

Determinar las expresiones del vector posición, de la velocidad y la aceleración, y la distancia de la partícula al origen de coordenadas cuando t=2 segundos.

Solución: $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 + 2)\vec{j} + \vec{k}$ $\quad \vec{v}(t) = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$ $\quad \vec{a}(t) = 2\vec{j}$ $\quad |\vec{r}(2)| = \sqrt{53}$

5.2- Una partícula sigue la trayectoria, en función del tiempo:

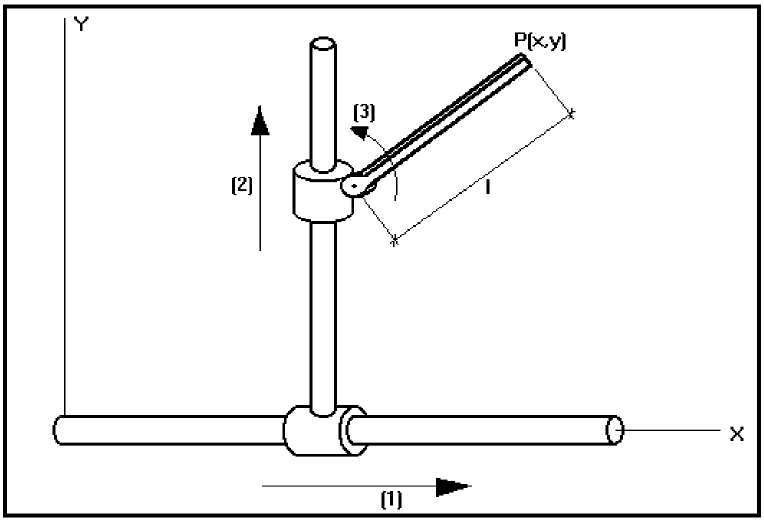
$$x = t^2 \qquad y = 2t \qquad z = 1$$

Calcular la aceleración y sus componentes intrínsecas.

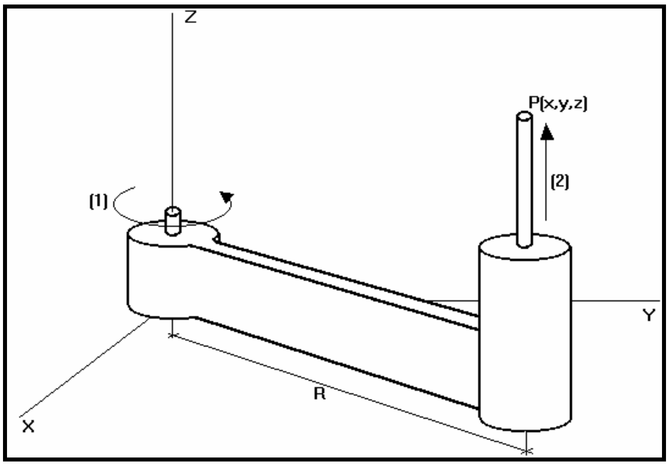
5.3- Sea una partícula que se mueve con aceleración $\vec{a} = 2t\vec{j}$, y que en el instante inicial tiene una velocidad $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$, situada en el origen de coordenadas. Calcular la expresión de la velocidad y trayectoria en función del tiempo.

5.4- Un movimiento circular, centrado en el origen de coordenadas, y sobre el plano XY, tiene una velocidad angular $\omega = 2$ radianes/segundo, y radio R = 5m. Calcular la velocidad que tiene la partícula al pasar por el punto (3,4) m.

5.5- El mecanismo de la figura se desplaza a lo largo del eje OX (1) con velocidad **a**, a lo largo del eje OY (2) con velocidad **b**, y gira el brazo de longitud **l** con velocidad angular ω. Todo el movimiento se realiza sobre el plano XY, y la posición inicial del extremo del brazo es (l,0,0). Determinar las ecuaciones del movimiento, posición, velocidad y aceleración, del extremo del brazo.



5.6- El mecanismo de la figura gira alrededor del eje OZ (1) con velocidad angular constante □, y la longitud del pistón (2) aumenta con velocidad v_0 constante. Si la longitud del brazo es R, y el punto de partida del movimiento es $(R,0,h_0)$, determinar la velocidad y aceleración del punto P, extremo del pistón.



Otros problemas:
"PROBLEMAS DE MECÁNICA" E.Bonet et al. SPUPV-88.162-2ª:
páginas 6-5 a 6-23