LECCIÓN 6. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO

6.1. INTRODUCCIÓN.

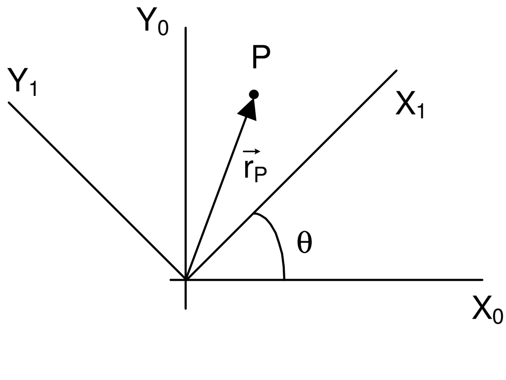
Para estudiar la cinemática del sólido, en primer lugar estudiaremos el caso más general de un punto que se mueve respecto de un sistema de referencia móvil (con los subíndices 1), y que a su vez se mueve respecto de un sistema de referencia fijo (subíndices 0). El primero de estos movimientos es el que se llama movimiento relativo del punto respecto del sistema móvil, y el segundo el movimiento de arrastre.

Cada magnitud vectorial que utilicemos llevará asociado un subíndice situado a la derecha del vector, y un superíndice en el lado izquierdo. El subíndice indica el punto al que se refiere la magnitud expresada, y el superíndice indica el sistema de referencia en el que está expresada dicha magnitud. Por ejemplo, ${}^{0}\vec{V}_{B}$ representa la velocidad del punto B expresada en el sistema de referencia 0.

En aquellos casos en los que no se indique el sistema de referencia en el cual se expresa la magnitud (superíndice izquierdo), se entenderá que ésta se puede escribir en cualquiera de los sistemas de referencia manejados.

En este tipo de movimientos es fundamental la derivación de un vector, operación que estudiaremos a continuación.

6.2. CÁLCULO DE LA DERIVADA DE UN VECTOR EXPRESADO EN UN SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL



Para conseguir una mayor sencillez de cálculo trabajaremos en un espacio bidimensional (plano), siendo los resultados que obtengamos fácilmente generalizables al espacio tridimensional, como veremos.

Sean dos sistemas de referencia cuyos orígenes, para mayor sencillez haremos coincidir. Uno de los sistemas de referencia es fijo (0), y el otro gira respecto del fijo con una velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$.

Sea un punto P animado de un doble movimiento: se mueve juntamente con el sistema móvil (movimiento de arrastre), y además se mueve respecto de este sistema móvil (movimiento relativo). Al punto P se asocia un vector, $\vec{r}_P$, cuyo origen es O, y cuyo extremo es P. El vector $\vec{r}_P$ es variable en el tiempo, y aunque es único en cada instante, tendrá distintas componentes según se escriba en un sistema de referencia u otro:

$$^0\vec{r}_P = x_{P0}\vec{i}_0 + y_{P0}\vec{j}_0 \qquad\qquad ^1\vec{r}_P = x_{P1}\vec{i}_1 + y_{P1}\vec{j}_1$$

Si $\vec{r}_P$ se expresa en el sistema de referencia fijo su derivada es inmediata:

$$\frac{d^0\vec{r}_P}{dt} = \frac{dx_{P0}}{dt}\vec{i}_0 + \frac{dy_{P0}}{dt}\vec{j}_0 = \dot{x}_{P0}\vec{i}_0 + \dot{y}_{P0}\vec{j}_0 = {}^0\vec{v}_P$$

Pero si tratamos de hacer lo mismo con el vector expresado en el sistema móvil resulta:

$$\frac{d^1\vec{r}_P}{dt} = \frac{dx_{P1}}{dt}\vec{i}_1 + x_{P1}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_{P1}}{dt}\vec{j}_1 + y_{P1}\frac{d\vec{j}_1}{dt}$$

Los términos que incluyen las derivadas de x_{P1} y de y_{P1} suponen derivar las componentes del vector como si el sistema 1 fuera fijo, lo que escribiremos como $\frac{\delta^1\vec{r}_P}{dt}$. Pero ahora, además, debemos evaluar las derivadas de los unitarios del sistema móvil. Para ello, como

$$^0\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

resulta $$^0\vec{\mathbf{i}}_1 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\vec{\mathbf{i}}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\,\vec{i}_0 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}_0$$

y $$^0\vec{\mathbf{j}}_1 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\vec{\mathbf{j}}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{\mathbf{i}}_0 + \cos\theta\,\vec{\mathbf{j}}_0$$

Así pues:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = -\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}_0 + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}_0 = \dot{\theta}\vec{j}_1 = \omega\vec{j}_1 = \vec{\omega}\wedge\vec{i}_1$$

y $$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}_0 - \dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}_0 = -\dot{\theta}\vec{i}_1 = -\omega\vec{i}_1 = \vec{\omega}\wedge\vec{j}_1$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ es la velocidad angular del sistema móvil. Análogamente podríamos calcular la derivada del unitario en la dirección del eje Z, y podríamos llegar a la expresión más general de la derivada buscada, que sería:

$$\frac{d^1\vec{r}_P}{dt} = \frac{dx_{P1}}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_{P1}}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_{P1}}{dt}\vec{k}_1 + x_{P1}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_{P1}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_{P1}\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \frac{\delta^1\vec{r}_P}{dt} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P$$

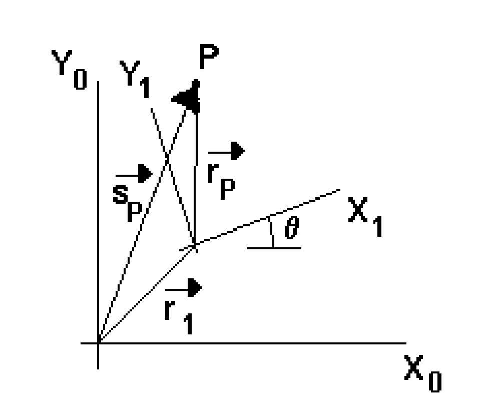
Es decir

$$\boxed{\frac{d\,{}^1\vec{r}_P}{dt} = \frac{\delta\,{}^1\vec{r}_P}{dt} + {}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P} \qquad (6.1)$$

El primer término de esta ecuación es la expresión de la velocidad relativa del punto P. Ahora el vector $\vec{\omega}$ representa el vector velocidad angular del sistema móvil en el espacio tridimensional, es decir, el vector cuyas tres componentes son las velocidades de giro en cada uno de los tres planos coordenados.

6.3. CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO.

Supongamos el caso más general en el que un punto P tiene un movimiento relativo respecto de un sistema móvil (1) que a su vez está dotado de un movimiento de arrastre respecto de un sistema fijo (0), incluso con una velocidad y aceleración angulares, $\omega = \dot{\theta}$ y $\alpha = \ddot{\theta}$



$$\vec{s}_P = \vec{r}_1 + \vec{r}_P \Rightarrow \vec{v}_P = \frac{d\vec{s}_P}{dt} = \frac{d^0\vec{r}_1}{dt} + \frac{d^1\vec{r}_P}{dt} = {}^0\vec{v}_1 + \frac{\delta^1\vec{r}_P}{dt} + {}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P$$

por lo que la velocidad de P, escrita en el sistema de referencia móvil, sería:

$${}^1\vec{v}_P = {}^1R_0\,{}^0\vec{v}_1 + \frac{\delta^1\vec{r}_P}{dt} + {}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P$$

El término $\frac{\delta^1\vec{r}_P}{dt} = \dot{x}_{P1}\vec{i}_1 + \dot{y}_{P1}\vec{j}_1$ es la llamada velocidad relativa del punto P respecto del sistema móvil, $\vec{v}_P^{rel}$, por lo que la expresión anterior quedaría:

$$\boxed{{}^1\vec{v}_P = {}^1\vec{v}_1 + {}^1\vec{v}_P^{rel} + {}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P} \qquad (6.2)$$

Si derivamos la ecuación anterior, tendremos la aceleración del punto P:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d^0\vec{v}_1}{dt} + \frac{d^1\vec{v}_P^{rel}}{dt} + \frac{d}{dt}({}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)$$

Estudiemos cada uno de los tres términos de esta ecuación:

* El término $\frac{d^0\vec{v}_1}{dt}$ representa la aceleración del origen del sistema móvil, ${}^0\vec{a}_1$. Dicha aceleración escrita en el sistema móvil será: ${}^1\vec{a}_1={}^1R_0\,{}^0\vec{a}_1$

* El término $\frac{d^1\vec{v}_P^{rel}}{dt}$ supone derivar el vector velocidad relativa (escrito en el sistema móvil). Como hemos visto en la ecuación (6.1), esta derivada consta de dos términos, derivar como si el sistema fuera fijo $\frac{\delta^1\vec{v}_P^{rel}}{dt}$, lo que llamaremos aceleración relativa, $\vec{a}_P^{rel}$, y el producto $\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{v}_P^{rel}$.

* El tercer término quedaría:

$$\frac{d}{dt}({}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)=\frac{d^1\vec{\omega}}{dt}\wedge{}^1\vec{r}_P+{}^1\vec{\omega}\wedge\frac{d^1\vec{r}_P}{dt}={}^1\vec{\alpha}\wedge{}^1\vec{r}_P+{}^1\vec{\omega}\wedge({}^1\vec{v}_P^{rel}+{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)$$

Por lo que la aceleración del punto P, escrita en el sistema móvil, sería:

$${}^1\vec{a}_P={}^1\vec{a}_1+{}^1\vec{a}_P^{rel}+{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{v}_P^{rel}+{}^1\vec{\alpha}\wedge{}^1\vec{r}_P+{}^1\vec{\omega}\wedge({}^1\vec{v}_P^{rel}+{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)$$

y reagrupando términos:

$$\boxed{{}^1\vec{a}_P={}^1\vec{a}_1+{}^1\vec{a}_P^{rel}+2\,{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{v}_P^{rel}+{}^1\vec{\alpha}\wedge{}^1\vec{r}_P+{}^1\vec{\omega}\wedge({}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)} \qquad (6.3)$$

En esta ecuación aparecen, de forma explícita, algunos términos cuyo significado es conocido y otro término que debemos interpretar:

- El término ${}^1\vec{a}_1$ corresponde a la aceleración del origen del sistema móvil.
- El término ${}^1\vec{a}_P={}^1\vec{a}_1+{}^1\vec{a}_P^{rel}+2\,{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{v}_P^{rel}+{}^1\vec{\alpha}\wedge{}^1\vec{r}_P+{}^1\vec{\omega}\wedge({}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)$ corresponde a la aceleración relativa del punto P.
- Los términos ${}^1\vec{a}_P={}^1\vec{a}_1+{}^1\vec{a}_P^{rel}+2\,{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{v}_P^{rel}+{}^1\vec{\alpha}\wedge{}^1\vec{r}_P+{}^1\vec{\omega}\wedge({}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)$ y ${}^1\vec{\omega}\wedge({}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{r}_P)$ corresponden, respectivamente, a las aceleraciones tangencial y normal del movimiento de arrastre del punto P alrededor del origen del sistema de móvil.
- El término $2\,{}^1\vec{\omega}\wedge{}^1\vec{v}_P^{rel}$, desconocido hasta el momento, es la llamada aceleración complementaria o de Coriolis, y es debida a la combinación de una velocidad relativa junto al movimiento de arrastre (se anula cuando $\vec{\omega}$ y $\vec{v}_P^{rel}$ son paralelos). La aceleración de Coriolis se manifiesta como una “desviación” del movimiento que, presuntamente, no debía sufrir. Por ejemplo, el disparo de un proyectil sobre la superficie terrestre, al ser la velocidad relativa del proyectil elevada, y combinada con el movimiento de rotación de la Tierra, produce una aceleración de Coriolis que desvía el proyectil de su trayectoria rectilínea, de modo que en el hemisferio Norte, dicha desviación se produce hacia la derecha, y hacia la izquierda en puntos del hemisferio Sur.

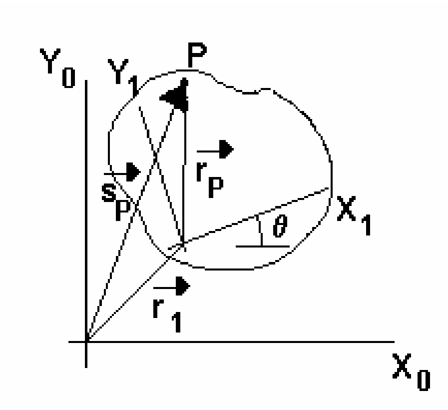
Estas expresiones de velocidad y aceleración se podrían escribir en el sistema fijo como:

$${}^{0}\vec{v}_P = {}^{0}R_1\,{}^{1}\vec{v}_P \qquad \text{y} \qquad {}^{0}\vec{a}_P = {}^{0}R_1\,{}^{1}\vec{a}_P$$

6.4. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

Para el estudio de la cinemática del sólido rígido, el método que se sigue es el de considerarlo como un conjunto de infinitos puntos, siendo la distancia entre dos cualesquiera de ellos siempre la misma. Es decir, si A y B son dos cualesquiera de sus puntos, en un sólido rígido se cumple que

$$\frac{d\left|\overrightarrow{AB}\right|}{dt} = 0$$



Además, se asocia un sistema de referencia indisolublemente unido al sólido, sistema (1) de la figura.

Puesto que, en este caso, un punto P cualquiera del sólido se mueve solidariamente con el sistema móvil, tanto la velocidad relativa como la aceleración relativa son nulas ($\vec{v}_P^{rel} = \vec{a}_P^{rel} = 0$), por lo que las ecuaciones correspondientes al punto P quedan:

$$\boxed{{}^{1}\vec{v}_P = {}^{1}R_0\,{}^{0}\vec{v}_1 + {}^{1}\vec{\omega}\wedge{}^{1}\vec{r}_P} \quad (6.4)$$

$$\boxed{{}^{1}\vec{a}_P = {}^{1}\vec{a}_1 + {}^{1}\vec{\alpha}\wedge{}^{1}\vec{r}_P + {}^{1}\vec{\omega}\wedge({}^{1}\vec{\omega}\wedge{}^{1}\vec{r}_P)} \quad (6.5)$$

En estas ecuaciones, el punto 1 es el origen del sistema de referencia móvil (1), que se puede elegir arbitrariamente a nuestra comodidad.

6.4.1. MOVIMIENTO DE TRASLACION DE UN SÓLIDO RÍGIDO.

Un caso particular de movimiento de un sólido rígido es el movimiento de traslación, en el que un vector que une dos cualesquiera de los puntos del sólido permanece invariable durante el movimiento, es decir, que se cumple que

$${}^{1}\vec{r}_P = \text{cte} \Rightarrow \frac{d\,{}^{1}\vec{r}_P}{dt} = 0$$

Por sencillez supondremos que los tres ejes de ambos sistemas de referencia son paralelos. Como la velocidad de un punto es la derivada respecto del tiempo del vector de posición, resultará:

$${}^{0}\vec{v}_P = \frac{d\,{}^{0}\vec{s}_P}{dt} = \frac{d}{dt}({}^{0}\vec{r}_1 + {}^{1}\vec{r}_P) = \frac{d\,{}^{0}\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\,{}^{1}\vec{r}_P}{dt} = {}^{0}\vec{v}_1$$

Y si derivamos una segunda vez, obtendremos las aceleraciones:

$$ {}^{0}\vec{a}_P = \frac{d\,{}^{0}\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\,{}^{0}\vec{v}_1}{dt} = {}^{0}\vec{a}_1 $$

Es decir, que en un movimiento de traslación, todos los puntos de un sólido rígido tienen la misma velocidad y la misma aceleración.

Un caso más general sería aquel en el que, aún tratándose de un movimiento de traslación de un sólido, el sistema de referencia que se mueve con el sólido (1) no tuviera sus ejes paralelos a los del sistema fijo.

En este caso, puesto que la matriz de transformación que convierte un vector expresado en el sistema 1 en el mismo vector expresado en el sistema 0 (${}^{0}R_1$) no varía en el tiempo será:

$$ {}^{0}\vec{r}_P = {}^{0}R_1\,{}^{1}\vec{r}_P + {}^{0}\vec{r}_1 \qquad {}^{0}\vec{v}_P = {}^{0}R_1\,{}^{1}\vec{v}_P = {}^{0}\vec{v}_1 \qquad {}^{0}\vec{a}_P = {}^{0}R_1\,{}^{1}\vec{a}_P = {}^{0}\vec{a}_1 $$

6.5. CINEMÁTICA DE UN BRAZO ARTICULADO.

En el caso de las barras de un brazo de un robot, unidas mediante articulaciones, ó de cualquier sistema mecánico semejante, el procedimiento para calcular la velocidad y aceleración de cada una de las barras y del manipulador final sería el siguiente: empezando por el sistema de referencia fijo de la base (0), de forma iterativa, incluyendo las velocidades y aceleraciones de cada una de las articulaciones y mediante las ecuaciones generales calculadas en el punto 3, se iría avanzando desde la base, la barra 1, la 2,... hasta el manipulador final. Es decir:

1º) Utilizando alguno de los algoritmos existentes, se establecen los sistemas de referencia de cada uno de los elementos del brazo.

2º) Se calculan las matrices de transformación que convierten las componentes de un vector expresadas en un sistema de referencia i+1, en las componentes del mismo vector expresadas en el sistema de referencia anterior, i, ${}^{i}R_{i+1}$, para i=0...n, y las matrices que convierten las componentes de un vector expresadas en el sistema i, en las componentes del mismo vector expresado en el sistema base, ${}^{0}R_i$. Es necesario tener en cuenta que, puesto que nuestro objetivo es expresar vectores velocidad y aceleración en un sistema de referencia u otro, las matrices que utilizaremos serán las de rotación (3x3), y no es necesario manejar la matriz homogénea de transformación (4x4).

3º) Se calcula la velocidad angular de cada una de las barras del brazo del robot escrita en el sistema de referencia de la propia barra, ${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1}$.

Para ello, partiendo del sistema base (fijo), en el que ${}^{0}\vec{\omega}_0 = 0$, cada barra tendrá la velocidad angular de la barra anterior más la velocidad angular relativa de una barra respecto de la anterior (propagación de las velocidades angulares); si cada articulación se alinea con el eje **z** anterior, entonces

${}^{i}\vec{\omega}_{i+1/i} = \dot{\varphi}\vec{k}_i$ y por tanto ${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1/i} = {}^{i+1}R_i \dot{\varphi}\vec{k}_i$, donde φ es el ángulo formado por las barras i+1 e i. Es decir:

$$\boxed{{}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{\omega}_i + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1/i}} \qquad \text{para } i=0...n-1$$

En el caso en que la unión de las barras i e i+1 sea prismática, como $\omega_{i+1/i} = 0$

$${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{\omega}_i \qquad \text{para } i=0...n-1 \qquad \text{Articulación prismática}$$

4º) Se calculan las velocidades lineales de los orígenes de cada sistema de referencia en las coordenadas propias de ese sistema, aplicando la ecuación (6.2) (ahora, el que llamábamos punto P es el origen del sistema i+1). Según vimos, y partiendo de que ${}^{0}\vec{v}_0 = 0$

$$\boxed{{}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{v}_i + {}^{i+1}\vec{v}^{\,rel}_{i+1/i} + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{i+1}} \qquad i=0...n-1$$

donde ${}^{i+1}\vec{r}_{i+1}$ es el vector que tiene su origen en el origen del sistema de referencia i, y su extremo en el origen del sistema de referencia i+1, escrito en el sistema i+1. Se puede calcular la velocidad lineal de la mano escrita en el sistema de referencia de la base, sin más que hacer: ${}^{0}\vec{v}_n = {}^{0}R_n\,{}^{n}\vec{v}_n$

Si la articulación es de revolución ($\vec{v}^{\,rel}_{i+1/i} = 0$), queda:

$${}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{v}_i + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{i+1} \qquad i=0...n-1 \qquad \text{Articulación de revolución}$$

5º) De forma análoga a las anteriores, y partiendo de que ${}^{0}\vec{\alpha}_0 = 0$, se calcula la aceleración angular de cada barra escrita en el sistema de referencia de la propia barra, ${}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1}$, mediante la ecuación:

$$\boxed{{}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{\alpha}_i + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1/i} + {}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1/i}} \qquad \text{para } i=0...n-1$$

llamada ley de propagación de las aceleraciones angulares de las barras.

Es necesario tener en cuenta, igual que con las velocidades angulares, que

$${}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1/i} = {}^{i+1}R_i\,\ddot{\varphi}\vec{k}_i$$

Si la articulación es prismática, como $\vec{\omega}_{i+1/i} = \vec{\alpha}_{i+1/i} = 0$, queda:

$${}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{\alpha}_i \qquad i=0...n-1 \qquad \text{Articulación prismática}$$

6º) Se calcula la aceleración lineal del origen del sistema de referencia ligado a cada una de las barras, escrita en el sistema de referencia propio,

${}^{i+1}\vec{a}_{i+1}$. Para ello, partiendo de que ${}^{0}\vec{a}_0 = 0$, y aplicando la ecuación (6.3) con i=0...n-1 (nuevamente, el que llamábamos punto P es ahora el origen del sistema i+1):

$$\boxed{{}^{i+1}\vec{a}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{a}_i + {}^{i+1}\vec{a}^{rel}_{i+1/i} + 2\,{}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{v}^{rel}_{i+1/i} + {}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{i+1} + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge ({}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{i+1})}$$

Se puede calcular la aceleración lineal de la mano escrita en el sistema de referencia de la base, sin más que hacer: ${}^{0}\vec{a}_n = {}^{0}R_n\,{}^{n}\vec{a}_n$

Si la articulación es de revolución ($\vec{a}^{rel}_{i+1/i} = \vec{v}^{rel}_{i+1/i} = 0$), queda:

$$ {}^{i+1}\vec{a}_{i+1} = {}^{i+1}R_i\,{}^{i}\vec{a}_i + {}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{i+1} + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge ({}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{i+1}) \quad i=0...n-1 \qquad \text{A. revolución}$$

7º) Aplicando la ecuación para el cálculo de la aceleración de un punto de un sólido rígido conociendo la aceleración de otro punto (ecuación (6.5)), se calcula la aceleración lineal absoluta del centro de gravedad de cada una de las barras escrita en el sistema de referencia de la propia barra, ${}^{i+1}\vec{a}_{G_{i+1}}$:

$$\boxed{{}^{i+1}\vec{a}_{G i+1} = {}^{i+1}\vec{a}_{i+1} + {}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{G i+1} + {}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge ({}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}\vec{r}_{G i+1})} \qquad \text{para } i=0...n-1$$

donde ${}^{i+1}\vec{r}_{G_{i+1}}$ es el vector que tiene su origen en el origen del sistema de referencia i+1, y su extremo en el c.d.g. de la barra i+1, estando dicho vector escrito en el sistema i+1.

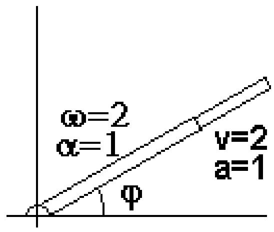
Una vez calculadas las aceleraciones de los centros de gravedad de cada una de las barras, finaliza el estudio cinemático del robot, y queda preparado el comienzo del estudio dinámico, que nos conducirá, en un capítulo posterior, al conocimiento de todas las fuerzas y momentos que aparecen en cada barra y en cada articulación.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>:

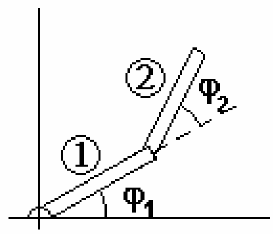
Meriam, J.L., "Dinámica", Capítulos 5 y 7, 2ª Ed., Barcelona 1988.
Craig, John J., "Introduction to Robotics, Mechanics and control", Capítulo 6, 2ª Ed., New York 1989.

EJERCICIOS LECCION 6. CINEMATICA DEL SOLIDO

6.1- En el manipulador de la figura, calcular la velocidad y aceleración de la mano, referidas al sistema de referencia fijo (el de la figura). La barra 1 gira con velocidad angular ω=2 rad/s, y aceleración angular α=1 rad/s^2. El brazo telescópico 2 sale del 1 con una velocidad de 2m/s y una aceleración de 1 m/s^2. En la posición indicada φ=30º, y las barras tienen unas longitudes de 2 y 1 m, respectivamente.



6.2- En el manipulador de la figura, calcular la velocidad y aceleración de la mano y de los c.d.g. de ambas barras en la posición φ_1=30º y φ_2=45º. La barra 1 gira con velocidad angular ω_1=2 rad/s, y aceleración angular α=1 rad/s^2, y en la articulación entre ambas barras hay un motor que hace girar la barra 2 con una velocidad angular relativa a la barra 1, de $\omega_{2/1}$=1 rad/s constante. Ambas barras tienen una longitud de 1 m, y los c.d.g. se puede suponer que están situados en los puntos medios de cada una de las barras.

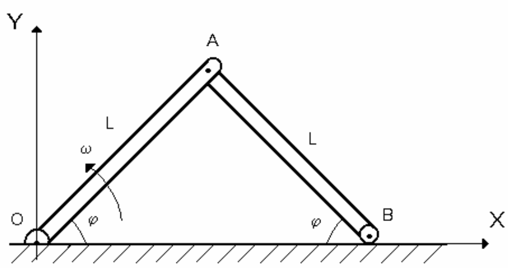


6.3- Un disco de radio R=1 m gira en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro, con velocidad angular $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ rad/s constante. En la periferia del disco hay un brazo, de longitud L=5 m, que se puede mover en el plano vertical, alrededor de un pasador que lo une al disco. El ángulo θ que el brazo forma con la horizontal varía con el tiempo, según la expresión θ=Csen(πt), donde C es una constante positiva, y t es el tiempo en segundos. Se pide calcular la velocidad y aceleración del extremo del brazo en el instante t=1 s.

Solución: $\vec{V}_A = \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4}\vec{i} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\vec{j} - 5C\pi\vec{k}$

$$\vec{a}_A = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{8}+5C^2\right)\vec{i} + \left(-\frac{3\pi^2\sqrt{2}}{16} + \frac{5C\pi^2}{4}(1-2\sqrt{2})\right)\vec{j}$$

6.4- En el mecanismo de la figura, la barra OA gira con velocidad angular w constante. El punto B apoya sobre el suelo, deslizando sobre él; ambas barras tienen longitud L. Calcular la velocidad y aceleración de los puntos A, B, y los c.d.g. de ambas barras (supuestos en el centro de las mismas) para φ=30º.



Solución: $\vec{V}_A = L\omega(-\operatorname{sen}\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = \frac{L\omega}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$

$\vec{a}_A = -L\omega^2(\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}) = \frac{-L\omega^2}{2}(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$ $\quad \vec{V}_{G_1} = \frac{L\omega}{2}(-\operatorname{sen}\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = \frac{L\omega}{4}(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$

$$\vec{a}_{G_1} = -\frac{L\omega^2}{2}(\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}) = -\frac{L\omega^2}{4}(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$$

$\vec{V}_B = -2L\omega\operatorname{sen}\varphi\vec{i} = -L\omega\vec{i}$ $\qquad \vec{a}_B = -2L\omega^2\cos\varphi\vec{i} = -L\omega^2\sqrt{3}\vec{i}$

$$\vec{V}_{G_2} = \frac{L\omega}{2}(-3\operatorname{sen}\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = \frac{L\omega}{4}(-3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{a}_{G_2} = -\frac{L\omega^2}{2}(3\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}) = -\frac{L\omega^2}{4}(3\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$$

Estos resultados están escritos en el sistema de referencia de la figura (fijo).