LECCION 7: DINAMICA DEL PUNTO

7.1. Fuerza. Leyes de Newton. Masa.
7.2. Cantidad de movimiento. Impulso mecánico.
7.3. Momento cinético. Teorema del momento cinético.
7.4. Ligaduras. Fuerzas de enlace.
7.5. Ecuación del equilibrio de un punto material.
7.6. Trabajo. Potencia.
7.7. Dinámica del movimiento circular.

7.1. FUERZA. LEYES DE NEWTON. MASA.

Fuerza es toda causa capaz de producir modificaciones en el estado de movimiento de un cuerpo, es decir, de modificar su velocidad o ponerlo en movimiento si está en reposo. En la mecánica general se añade al concepto de fuerza la cualidad de poder producir deformaciones en los cuerpos.

Hay tres axiomas que permiten sistematizar el estudio de la dinámica, y que se conocen como leyes de Newton. Es necesario resaltar que las leyes de Newton sólo son válidas cuando se toma como referencia un sistema inercial, es decir, un sistema de referencia que se encuentre en reposo, o animado de un movimiento rectilíneo y uniforme. Estas leyes son:

1er axioma: toda partícula libre de influencia externa permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Fuerza sería cualquier influencia externa capaz de modificar esta situación.

2º axioma: la influencia mutua que pueden ejercer dos puntos materiales aislados, entre sí, será idéntica en módulo y dirección, pero de sentido contrario en cada uno de los puntos materiales.

$$\left|\vec{F}_{AB}\right| = \left|\vec{F}_{BA}\right|$$

3er axioma: la influencia, ó fuerza, que se ejerce sobre un punto material es proporcional a la aceleración que se produce

$$\vec{F} \propto \vec{a}$$

La relación de proporcionalidad que existe entre la fuerza y la aceleración que aparece sobre un punto material se define como la masa:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La masa es una característica de cada cuerpo relacionada con la cantidad de materia del mismo.

El principio de superposición establece que si sobre un punto material actúa más de una fuerza, la aceleración resultante será la correspondiente a una fuerza suma de todas las fuerzas:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

7.2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO. IMPULSO MECÁNICO.

Se define como cantidad de movimiento de un punto material al producto de su masa por su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Si derivamos la cantidad de movimiento, suponiendo que la masa sea constante:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

La fuerza es la derivada respecto del tiempo de la cantidad de movimiento.

Si sobre un punto material actúa una fuerza F entre los instantes t_A y t_B , se define como impulso mecánico producido por dicha fuerza, a una magnitud vectorial calculada integrando el producto de la fuerza por el tiempo elemental entre los instantes inicial y final de su aplicación:

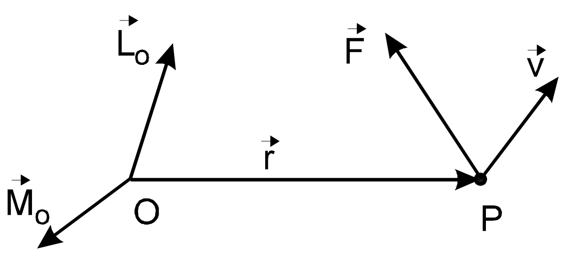
$$\vec{I}_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t)dt$$

El impulso lo podemos relacionar con la cantidad de movimiento, ya que:

$$\vec{I}_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t)dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{p}}{dt}dt = \vec{p}_B - \vec{p}_A$$

El impulso es igual a la variación de cantidad de movimiento que produce la fuerza.

7.3. MOMENTO CINÉTICO. TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO



Sea un punto material P, de masa m, sobre el que actúa un conjunto de fuerzas cuya resultante es $\vec{F}$, siendo $\vec{v}$ la velocidad en el instante considerado. Se define el momento cinético de P respecto de un punto cualquiera O, al momento de la cantidad de movimiento respecto de dicho punto:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{r}$ es el vector de posición de P respecto de O.

Si derivamos el momento cinético respecto del tiempo, suponiendo que la masa sea constante:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m(\vec{r} \times \vec{v})\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) + m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\left((\vec{v} \times \vec{v}) + (\vec{r} \times \vec{a})\right) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

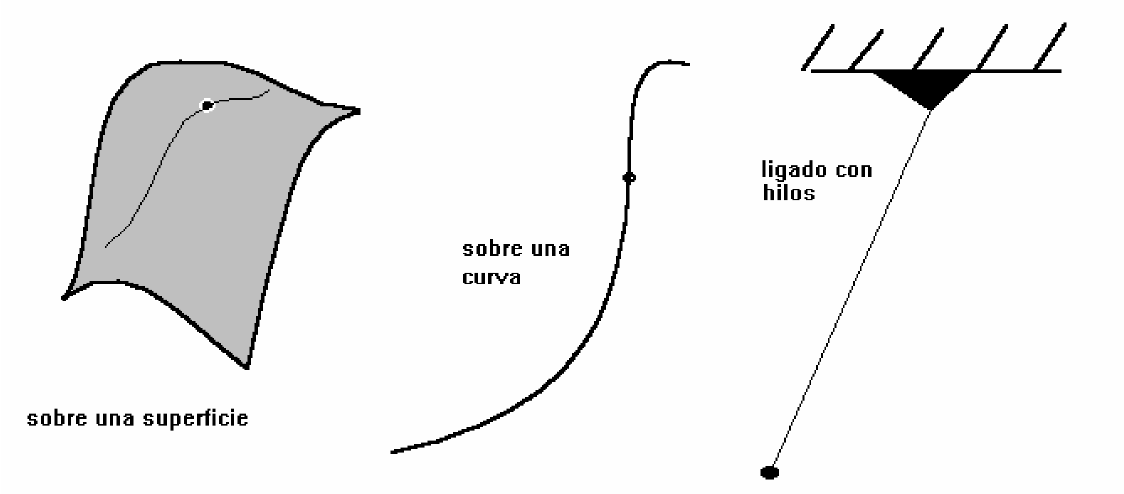
La derivada respecto del tiempo del momento cinético es el momento de las fuerzas aplicadas sobre el punto material respecto del mismo punto.

7.4. LIGADURAS. FUERZAS DE ENLACE.

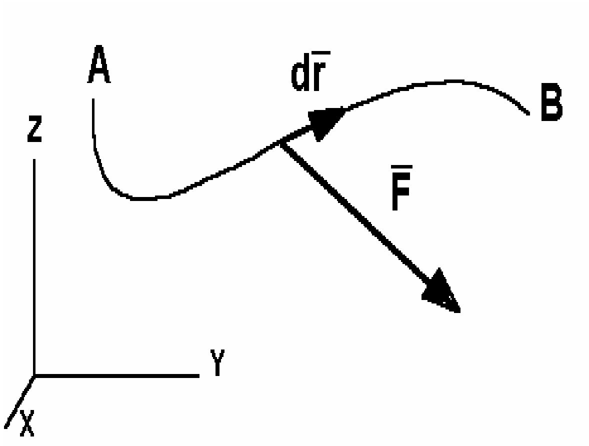
Se dice que un punto material es libre cuando su movimiento no tiene ninguna limitación. Aplicando la primera ley de Newton se podría calcular su aceleración, y por integración, conocidas las condiciones de contorno, obtendríamos la velocidad y trayectoria del movimiento.

Por contra, se dice que un punto material está ligado cuando su movimiento tiene algún tipo de limitación. Por ejemplo, está obligado a moverse sobre una superficie, o una determinada trayectoria. Existe, por lo tanto, un elemento pasivo que limita el movimiento que producirían las fuerzas que apliquemos sobre el punto. Tales elementos se denominan ligaduras.

Existe un tercer caso particular, combinación de los anteriores, que es el de movimientos limitados por hilos. Las características de estos hilos ideales son el ser inextensibles, no tener masa, y poder trabajar únicamente en tracción.



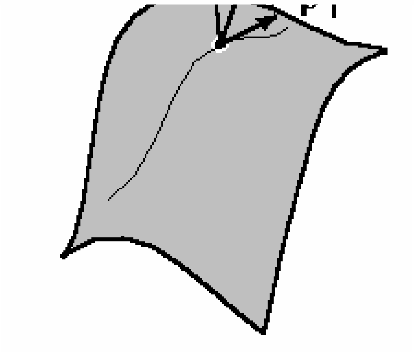
En estos casos no nos será posible plantear la ecuación de Newton con las fuerzas aplicadas, sino que deberemos incluir un término nuevo, que llamaremos fuerzas de enlace, F_e, que será equivalente en sus efectos sobre el movimiento a los efectos que producen de forma pasiva las limitaciones que tenga el mismo. De esta forma podremos obtener la aceleración, e igual que antes podríamos calcular velocidad y trayectoria:



$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \vec{F}_e = m\vec{a}$$

Las fuerzas de enlace se suelen descomponer en dos términos, normal y tangencial a la trayectoria: $\vec{F}_e = \vec{F}_T + \vec{F}_N$

Si el punto considerado se mueve a lo largo de una superficie, la fuerza de enlace se puede descomponer en dos componentes con claro sentido físico:



* Fuerza de enlace normal**:** Siempre será normal a la superficie, y en su caso a la curva, interpretándose como la reacción de la superficie normal a la misma, que impide que el punto material la atraviese. Por lo tanto el sentido será siempre hacia el lado de la superficie en que se encuentre el punto (una superficie no puede sujetar a un punto que se desprenda de ella).

* Fuerzas de enlace tangencial o fuerzas de rozamiento: La componente tangencial de las fuerzas de enlace únicamente puede ser debida a rozamientos, por lo que siempre irá en sentido contrario al movimiento. Se pueden plantear dos tipos de rozamientos:

Rozamiento seco, en el que la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza de enlace normal $F_T = \mu . F_N$; se denomina coeficiente de rozamiento μ a la relación de proporcionalidad.

Rozamiento viscoso, en el que la fuerza de rozamiento es una función creciente de la velocidad lineal del punto material $F_T = f(v)$ (ej: $F_T = k \cdot v^2$).

7.5. ECUACIÓN DEL EQUILIBRIO DE UN PUNTO MATERIAL.

La condición de equilibrio de un punto material supone que la aceleración de su movimiento sea nula, es decir, que siga un movimiento rectilíneo uniforme, o se encuentre en reposo:

Condición de equilibrio $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

7.6. TRABAJO. POTENCIA.

Se define como Trabajo elemental, realizado por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un punto material que hace un desplazamiento elemental $\vec{dr}$, como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento elemental

$$d\Im = \vec{F}.d\vec{r}$$

El Trabajo realizado por la fuerza al desplazar el punto material a lo largo de su trayectoria entre dos puntos sería la suma de los trabajos elementales realizados al ir desplazándose sobre ella, o lo que es lo mismo, la circulación de la fuerza a lo largo de la trayectoria entre los puntos inicial y final de su aplicación

$$\Im_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F}d\vec{r}$$

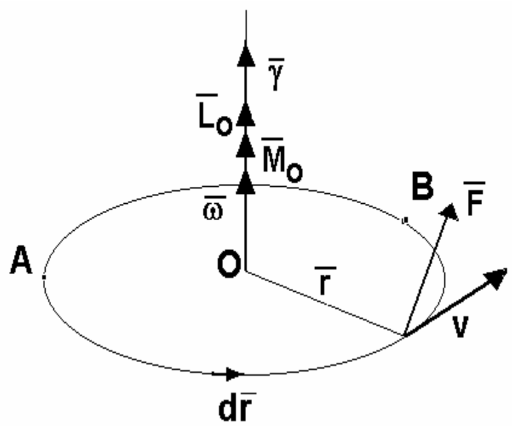
Se define la Potencia como el Trabajo realizado por unidad de tiempo

$$P = \frac{d\Im}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

que para cada instante es el producto de fuerza por velocidad.

7.7. DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR.

Por el interés que tiene el movimiento circular, aplicaremos las magnitudes de la dinámica a este caso. Sea una partícula que describe un movimiento circular debido a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ contenida en el plano del movimiento. El vector $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad lineal de la partícula, y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ son la velocidad y aceleración angulares en cada instante:



Cantidad de movimiento: $\vec{p} = m\vec{v} = m(\vec{\omega} \times \vec{r})$

Momento cinético: $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\vec{\omega}$

Momento de las fuerzas: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = mr^2\vec{\alpha}$

Potencia: $P = \frac{d\Im}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \frac{Frd\theta}{dt} = M_O\omega$

EJERCICIOS LECCION 7: DINAMICA DEL PUNTO

7.1- Un punto de masa m está suspendido de un hilo inextensible de longitud L, masa m, y cuyo otro extremo está unido a un eje vertical que gira con velocidad angular ω. Al girar, el hilo forma un ángulo φ con la vertical. Calcular el ángulo φ y la tensión del hilo en función de ω.

Solución: $\cos\varphi = \dfrac{g}{L\omega^2}$ $\quad T = mL\omega^2$

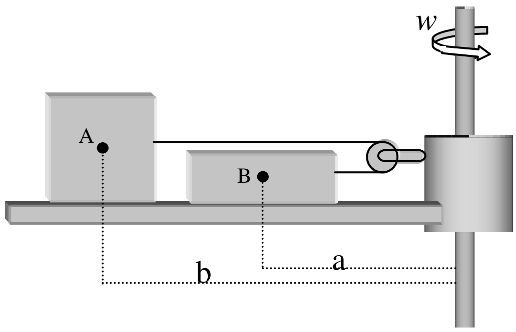
7.2- En un plano inclinado un ángulo α respecto de la horizontal, se encuentra un cuerpo en reposo. En un instante dado se suelta el cuerpo y comienza a deslizar por el plano inclinado, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre cuerpo y plano. Calcular el tiempo que invierte el cuerpo en recorrer una distancia L sobre el plano inclinado.

Solución: $t = \sqrt{\dfrac{2L}{g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)}}$

7.3- Dos cuerpos A y B, de masas M y m respectivamente, y el entramado sobre el que descansan giran en torno a un eje vertical con velocidad angular constante ω, según el dibujo. Despreciando el rozamiento entre los cuerpos y el entramado, calcular:

a) La tensión T del cable que une los cuerpos.

b) La fuerza que el tope ejerce sobre el cuerpo B.

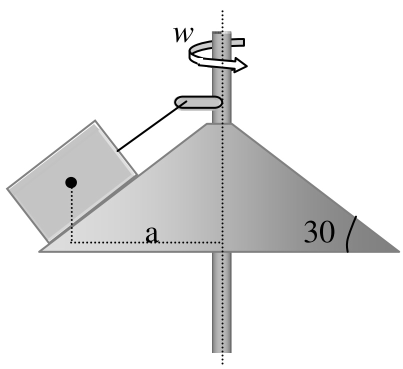


Solución: a) $T = M\omega^2 b$ $\quad$ b) $R = \omega^2(Mb - ma)$

7.4- Un bloque de masa M descansa sobre una superficie cónica lisa que gira en torno a un eje vertical con velocidad angular constante ω. El bloque está unido al eje giratorio mediante un cable. Calcular:

a) La tensión del cable.

b) ¿Cuánto debe valer ω para el bloque comience a despegarse de la superficie cónica (que sea nula la fuerza entre la superficie cónica y el bloque)?.



Solución: a) $T = \dfrac{M}{2}(\sqrt{3}a\omega^2 + g)$ $\quad$ b) $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}g}{a}}$