LECCION 8. ESTATICA DEL SOLIDO

8.1. INTRODUCCION.

Para iniciarse en el estudio de la Dinámica del Sólido, es práctica habitual comenzar con el caso más sencillo de estudiar: la Estática. De este modo se puede introducir la noción de fuerza de enlace en un sólido rígido sin necesidad de estudiar, simultáneamente, su estado cinemático, lo que simplifica el problema notablemente. Una vez se ha adquirido destreza en el manejo de fuerzas, es relativamente sencillo estudiar, de forma completa, el problema dinámico de un sólido rígido o conjunto de sólidos.

8.2. FUERZAS ACTUANTES SOBRE UN SÓLIDO. LIGADURAS.

Imaginemos el caso sencillo de un sólido rígido que se mueve por el espacio de forma totalmente libre, incluso sin estar sometido a ninguna fuerza gravitatoria; en esta situación, según establece la primera ley de Newton, el cuerpo describiría un movimiento rectilíneo y uniforme.

Si la situación anterior se produjera de forma idéntica pero dentro del campo gravitatorio terrestre, el peso sería la única fuerza actuante sobre el sólido (despreciando fuerzas de rozamiento y cualesquiera otras); el peso modificaría la trayectoria del cuerpo, que ya no sería rectilínea, ni constante su velocidad.

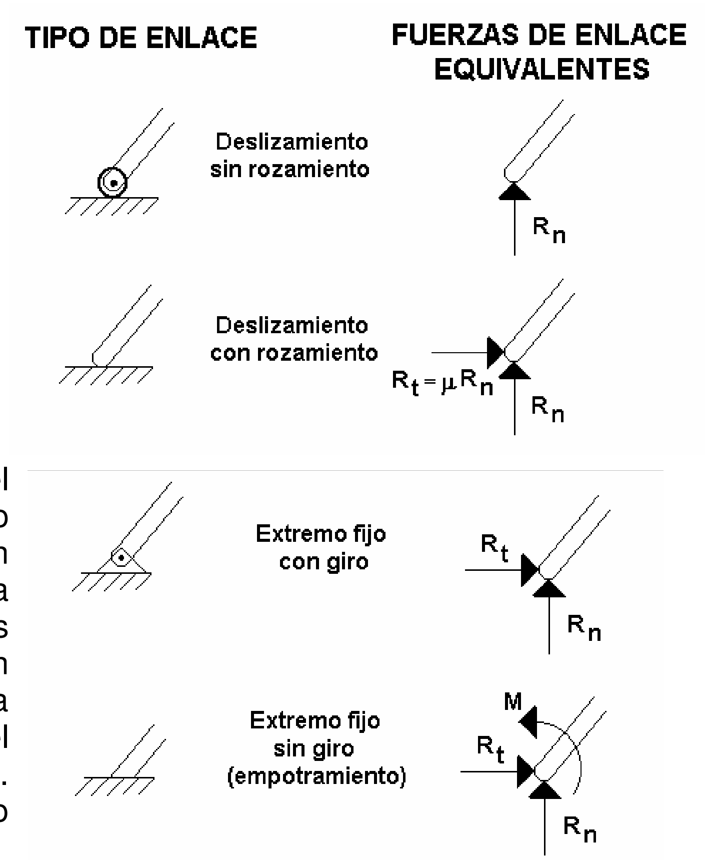
El caso más general sería el de un cuerpo que se ve sometido a distintas restricciones que impiden su libre movimiento. Tales restricciones, como ya vimos al estudiar la Dinámica del punto, se denominan ligaduras, y pueden restringir el movimiento del cuerpo en una única dirección, en dos, en tres, o incluso pueden establecer restricciones al giro.

Estas restricciones se pueden modelizar mediante unas fuerzas o unos momentos que actúan sobre el sólido y que se llaman fuerzas de enlace o reacciones, de tal modo que estas reacciones causen los mismos efectos que las ligaduras. En la figura se pueden ver algunos ejemplos junto con las reacciones equivalentes.

El caso de una barra en el que uno de sus extremos puede deslizar sin rozamiento sobre una superficie horizontal y girar libremente, se puede modelizar eliminando la superficie, y sustituyéndola por una fuerza vertical de valor desconocido (R_n), que hace que el extremo de la barra no se pueda desplazar verticalmente. Como existe libertad tanto para que este extremo se mueva horizontalmente como para que gire, no existe ninguna reacción en estos sentidos.

El caso del extremo de una barra que pudiera deslizar sobre una superficie horizontal pero con rozamiento, sería análogo al anterior pero introduciendo una fuerza horizontal que representaría al rozamiento. Esta fuerza tendría siempre sentido contrario al movimiento, y admitiendo que el rozamiento es seco, su valor sería proporcional a la fuerza de reacción normal (R_t=μR_n).

Otro caso sería el del extremo de una barra que no puede desplazarse en ningún sentido pero tiene libertad para girar. En este caso, las fuerzas de enlace equivalentes serían una reacción vertical (R_n) y otra horizontal (R_t), que impedirían el desplazamiento del extremo. Como el giro está permitido, no hay reacción en este sentido.

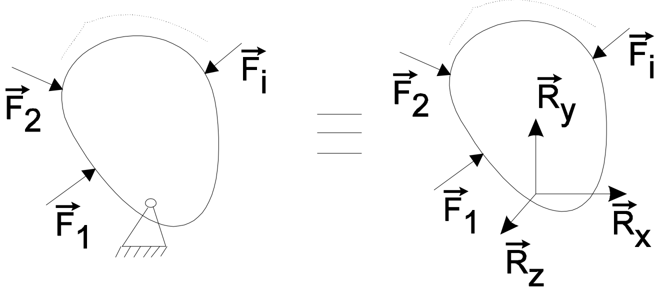


Si en el caso anterior, además, introdujéramos la imposibilidad del giro (empotramiento), habría que añadir, a las reacciones horizontal y vertical, un momento (M) que hiciera que el extremo de la barra no girara.

Es necesario tener en cuenta que, en aquellas barras donde exista un accionador, éste introducirá unas reacciones adicionales a las estudiadas.

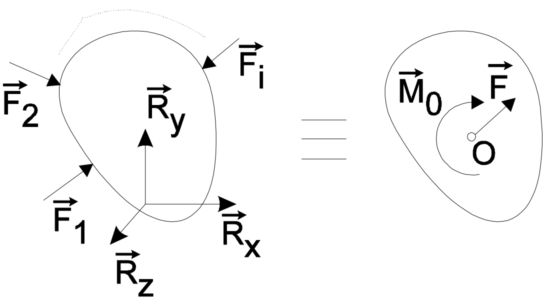
También, en el caso de dos barras unidas entre sí, según el principio de acción y reacción, los efectos que una barra produzca sobre la otra serán iguales pero de sentido contrario a los que la otra ejerza sobre la una.

8.3. PRINCIPIO DE AISLAMIENTO. DIAGRAMA DE SOLIDO LIBRE Y DE ESFUERZOS RESULTANTES.



Un sólido rígido que esté sometido a una serie de fuerzas exteriores y con unas ligaduras, se puede liberar de las ligaduras sustituyendo éstas por las reacciones que ejercen sobre el sólido, que serán, en general y a priori, desconocidas.

A partir del diagrama de sólido libre se puede calcular el diagrama de fuerzas resultantes en un punto O cualquiera, sin más que aplicar, sobre él, la fuerza resultante, $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_j \vec{R}_j$ y el momento resultante de las fuerzas, $\vec{M}_O$.



Teniendo en cuenta la ecuación del cambio de centro de momentos

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

se puede reducir el sistema de fuerzas y momentos en cualquier punto.

8.4. LIGADURAS DE LOS ELEMENTOS DE UN BRAZO ARTICULADO.

En el caso particular de estudiar los elementos de un brazo articulado, el problema no presenta especial dificultad, ya que, en principio, ninguna articulación presenta grado de libertad alguno; es decir, que ninguna articulación puede moverse de forma libre en ninguna dirección (ni movimientos lineales ni giratorios). Por ello, cada extremo de cada elemento del brazo tendrá, en principio, unos esfuerzos de ligadura compuestos por una fuerza y un momento de direcciones a priori desconocidas (o lo que es lo mismo, una fuerza y un momento en la dirección de cada uno de los tres ejes coordenados del sistema de referencia unido al elemento). Estos esfuerzos de ligadura, según el principio de acción y reacción, serán iguales y de sentido contrario a los existentes en el extremo del elemento anterior unido al que nos ocupa. Evidentemente, si el brazo con el que trabajamos presenta alguna simplificación (movimiento plano, o cualquier otra), podremos eliminar de entrada aquellas fuerzas de enlace superfluas.

La única peculiaridad que aparece al considerar un brazo articulado reside en el hecho de que, al tener cada articulación un accionador, la fuerza o el momento de enlace ejercida/o en la dirección del accionador (según la articulación sea prismática o giratoria) será ejercida por el accionador correspondiente, y no por el cuerpo de la articulación. Para conocerla, bastará calcular la componente de la fuerza o el momento de ligadura total en la dirección de la articulación correspondiente.

Finalmente decir que, para calcular los esfuerzos estáticos en los elementos de un brazo articulado, es preciso comenzar por el extremo del brazo, es decir, por el último elemento que mantiene el elemento manipulado, y a partir de él, ir calculando los esfuerzos totales y diagramas de esfuerzos resultantes en cada uno de los elementos hasta el elemento unido al sistema fijo.

8.5. ESTADO DE EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO. SISTEMAS ISOSTÁTICOS E HIPERESTÁTICOS.

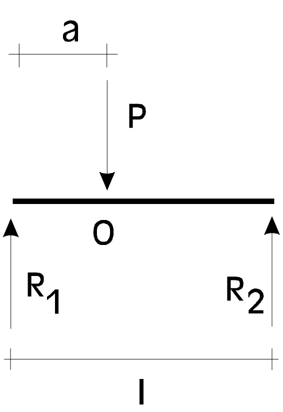
Un sólido rígido se encuentra en equilibrio cuando tanto la resultante como el momento resultante respecto de cualquier punto se anulan:

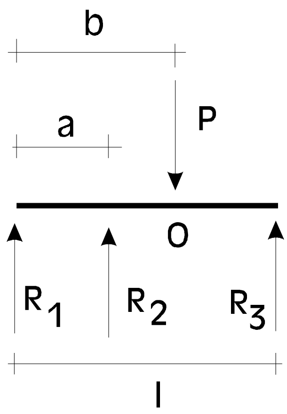
$$\vec{R} = 0 \qquad \text{y} \qquad \vec{M}_O = 0$$

Evidentemente, el equilibrio puede ser estático (no hay movimiento), o dinámico (existe movimiento pero sin aceleración).

Las dos ecuaciones vectoriales anteriores, en un caso general, dan lugar a seis ecuaciones escalares. Si las ligaduras del sólido son un número menor que el de ecuaciones (seis en un caso general), entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única, y se dice que el sistema es isostático (se pueden calcular las reacciones).

En cambio, puede ocurrir que el número de reacciones sea superior al de ecuaciones de la estática disponibles, lo que da lugar a los sistemas isostáticamente indeterminados ó hiperestáticos, para cuya resolución es necesario acudir a ecuaciones que relacionen fuerzas con deformaciones, lo que da origen a una parte de la Física llamada Elasticidad. Como ejemplos, supongamos una barra horizontal sobre la que actúa una carga P, y apoyada en dos o en tres puntos:





$P=R_1+R_2$

$R_1 a=R_2(l-a)$

$R_1=P(l-a)/l \quad R_2=Pa/l$

SISTEMA ISOSTATICO

$P=R_1+R_2+R_3$

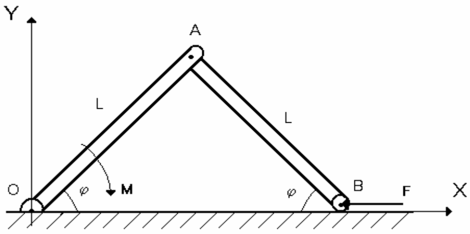
$R_1 b+R_2(b-a)=R_3(l-b)$

Imposible calcular R_1, R_2 y R_3

SISTEMA HIPERESTATICO

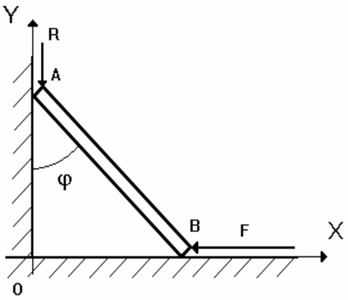
EJERCICIOS LECCION 8: ESTATICA

8.1- En el mecanismo de la figura, el punto O está fijo y permite el giro de la barra OA, mientras que el punto B puede deslizar, sin rozamiento sobre el suelo. Ambas barras tienen longitud L, existiendo en A una articulación. En O se aplica un momento M del sentido indicado en la figura. Calcular la fuerza horizontal F que hay que aplicar en B para que el mecanismo esté en equilibrio, en la posición indicada en la figura a) despreciando el peso de ambas barras, y b) suponiendo que cada una de ellas tiene una masa m.



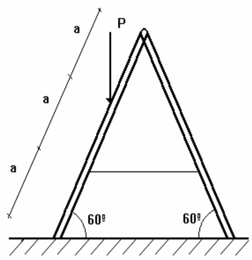
Solución: a) $F = \frac{M}{2L\,\text{sen}\,\varphi}$ b) $F = \frac{M}{2L\,\text{sen}\,\varphi} + \frac{mg}{2}\cot g\varphi$

8.2- La barra AB de la figura tiene longitud L, y desliza en ambos extremos sin rozamiento. Al extremo B se le aplica una fuerza horizontal $\vec{F} = -F\vec{i}$. Calcular, en función de φ, la fuerza vertical R que hay que aplicar al extremo A para conseguir el equilibrio a) despreciando el peso de la barra b) suponiendo para la barra una masa M.



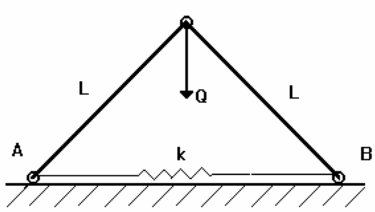
Solución: a) $R = F\cot g\varphi$ $R = F\cot g\varphi - \frac{Mg}{2}$

8.3- Sobre la escalera de la figura actúa una fuerza P en el punto indicado. Calcular las reacciones en cada una de las patas de la escalera, junto con la tensión en la cuerda, en dos supuestos: a) despreciando el peso de la escalera, b) suponiendo un peso Q para la escalera.



Solución: a) N1=2P/3 N2=P/3 T=P/(2(31/2))
b) N1=2P/3+Q/2 N2=P/3+Q/2 T=(4P+3Q)/(8(31/2))

8.4- El sistema de la figura está formado por las varillas AC y BC de longitud L, sin peso y articuladas en C, donde se carga un peso Q. Sus extremos A y B se unen con un resorte de constante k, siendo nula su longitud en reposo. Determinar el valor de Q para que, en la posición de equilibrio, el ángulo ACB sea recto.



Solución: Q=$2\sqrt{2}kL$

8.5- Un robot tiene la geometría que se indica en la figura, manteniendo un peso Q en el manipulador. Calcular las reacciones (fuerzas y momentos) en cada una de las uniones entre elementos del brazo, supuesto éste en reposo.