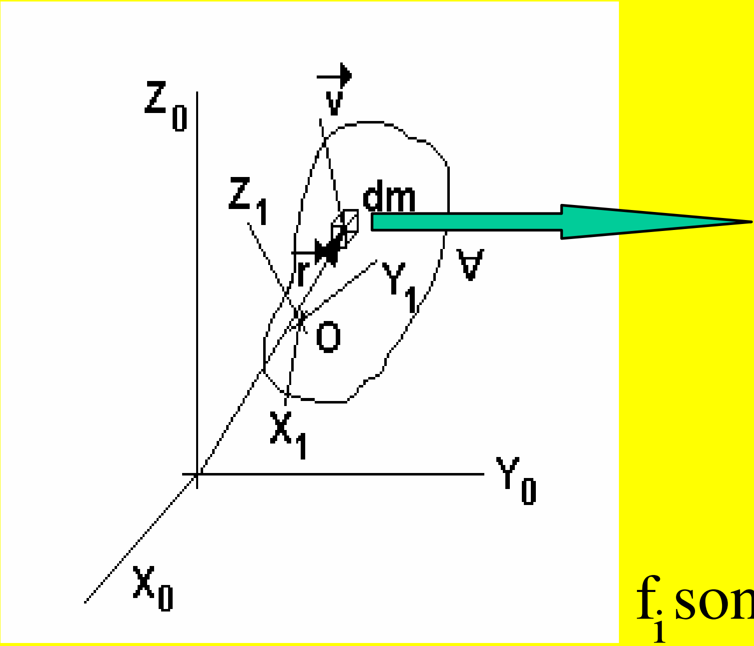
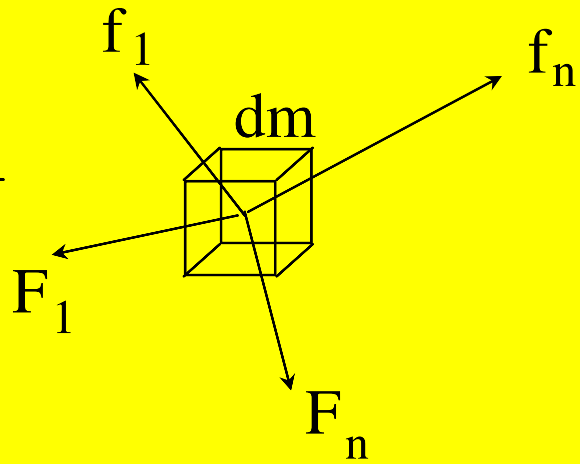
LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

- **9.1.-Movimiento del c.d.g. de un sólido rígido.**
- **9.2.-Cantidad de movimiento.**
- **9.3.-Momento cinético.**
- **9.4.-Teorema del momento cinético. Consecuencias.**
- **9.5.-Dinámica de un brazo articulado.**

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.1.-Movimiento del c.d.g.





$$\sum_{\forall} \vec{f}_i = 0$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

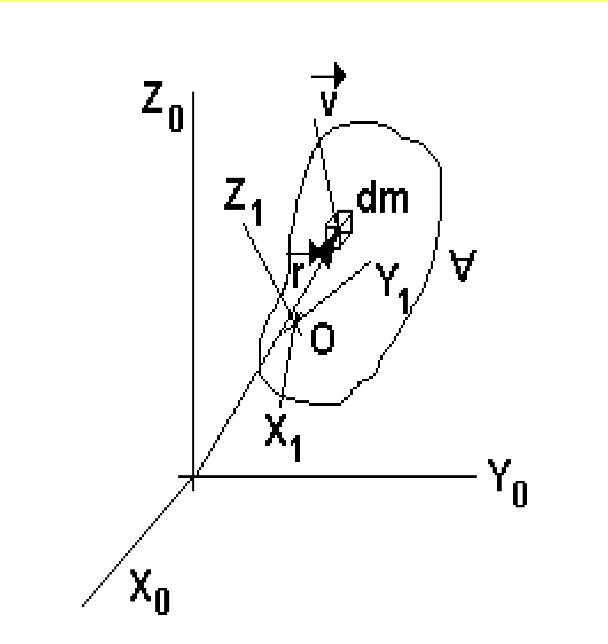
f_i son las fuerzas internas, o fuerzas elásticas

F_i son las fuerzas exteriores (incluso las reacciones)

3ª Ley de Newton: $$dm\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{dm} (\vec{F}_i + \vec{f}_i)$$

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.1.-Movimiento del c.d.g.



Extendiendo la 3ª Ley a todo el sólido:

$$\int_{\forall} dm \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \int_{\forall} (\sum_{dm} \vec{F}_i + \sum_{dm} \vec{f}_i) = \sum_{\forall} \vec{F}_i$$

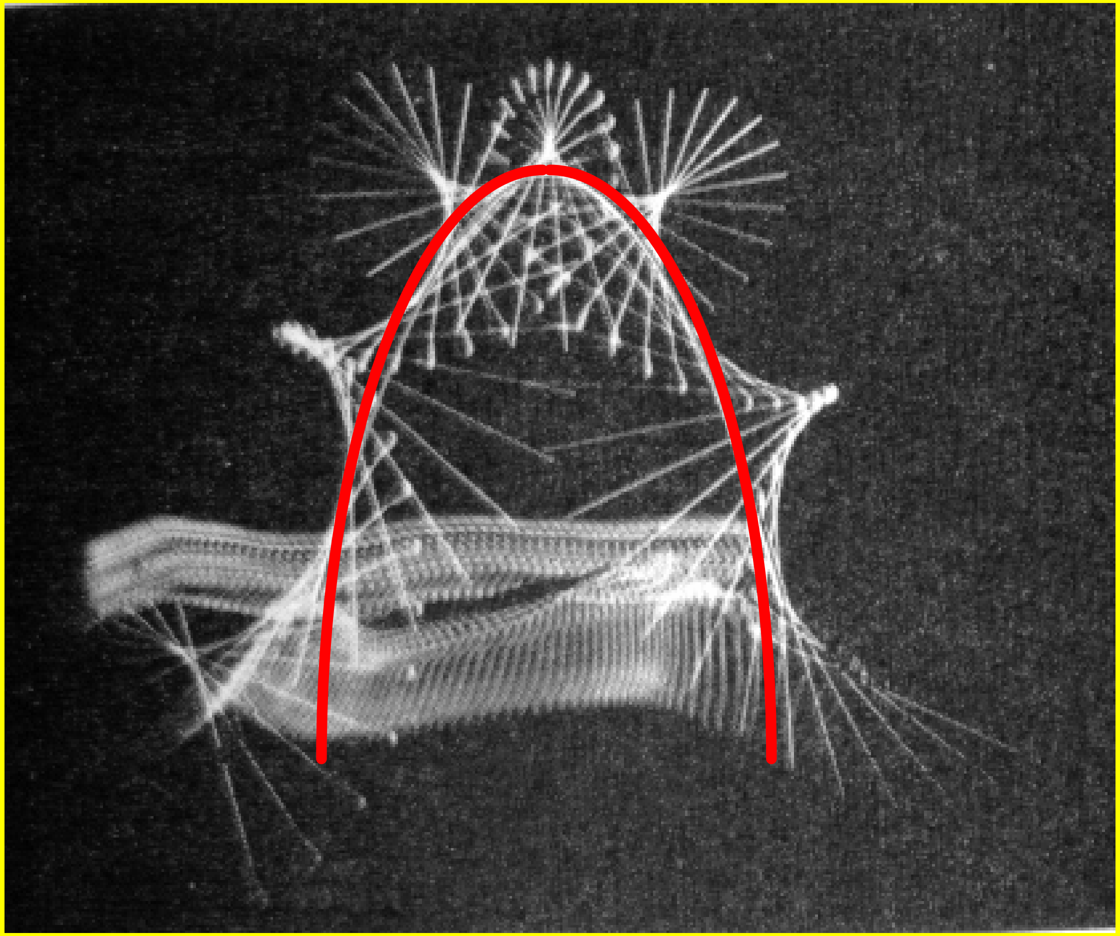
$$\int_{\forall} dm \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\int_{\forall} \vec{r} dm\right] = \frac{d^2}{dt^2}[\vec{r}_G M] = M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = M\vec{a}_G$$

$$\boxed{\sum_{\forall} \vec{F}_i = M\vec{a}_G}$$

F_i son las fuerzas exteriores (incluso reacciones)   G es el c.d.g.

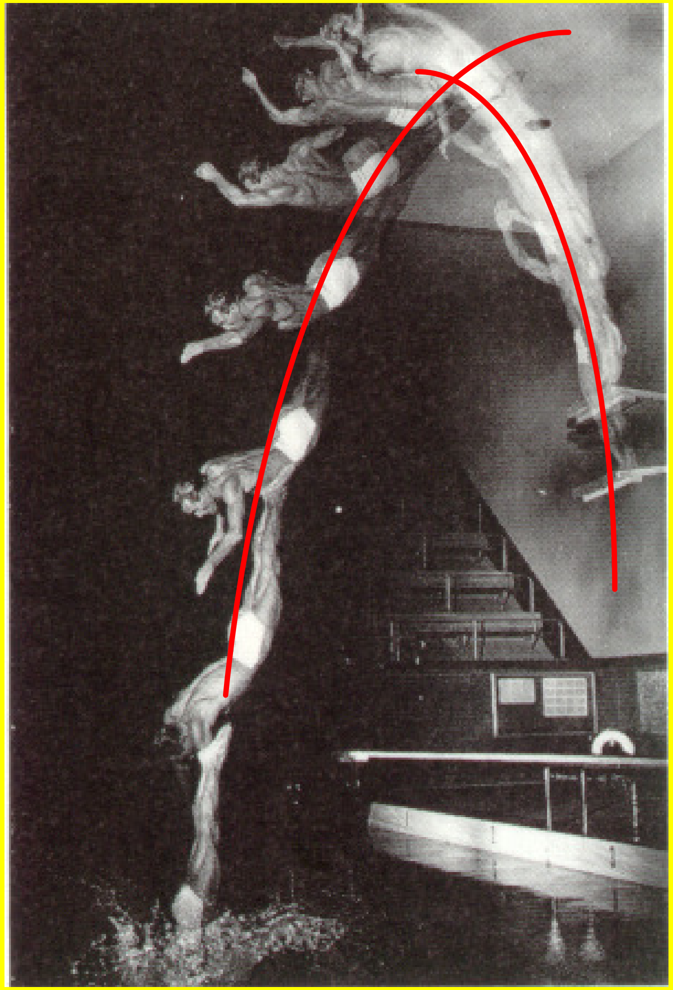
LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.1.-Movimiento del c.d.g.



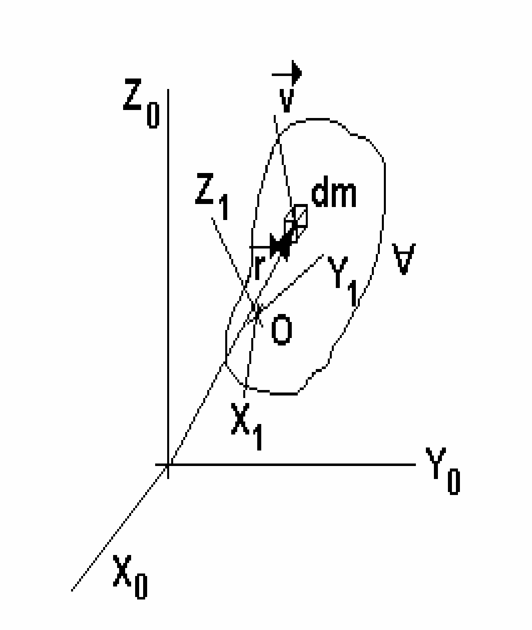
LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.1.-Movimiento del c.d.g.



LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.2.-Cantidad de movimiento

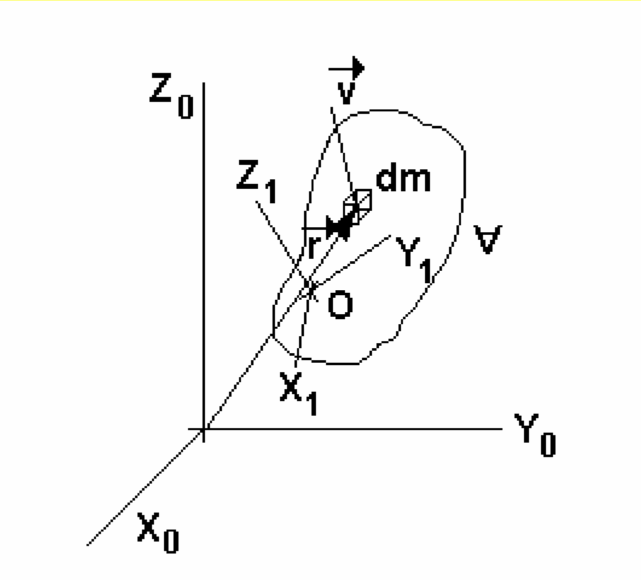


$$\vec{p} = \int_{\forall} d\vec{p} = \int_{\forall} \vec{v}dm = \int_{\forall} \frac{d\vec{r}}{dt}dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{\forall} \vec{r}dm\right) = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_G\right) = M\vec{v}_G$$

$$\boxed{\vec{p} = M\vec{v}_G}$$

G es el c.d.g.

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO



9.3.-Momento Cinético

$$\boxed{\vec{L}_O = \int_{\forall} \vec{r} \wedge \vec{v}\,dm}$$

$$\vec{L}_O = \int_{\forall} \vec{r} \wedge \vec{v}\,dm = \int_{\forall} \vec{r} \wedge (\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r})dm = \int_{\forall} \vec{r} \wedge \vec{v}_O dm + \int_{\forall} \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})dm$$

$$\int_{\forall} \vec{r} \wedge \vec{v}_O dm = (\int_{\forall} \vec{r} dm) \wedge \vec{v}_O = M\vec{r}_G \wedge \vec{v}_O$$

$${}^1\vec{r} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \qquad {}^1\vec{\omega} = \omega_x\vec{i}_1 + \omega_y\vec{j}_1 + \omega_z\vec{k}_1$$

$$\int_{\forall} \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})dm = \int_{\forall} (r^2\vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\vec{r})dm = \int_{\forall} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(\omega_x\vec{i}_1 + \omega_y\vec{j}_1 + \omega_z\vec{k}_1)dm - \int_{\forall} (x_1\omega_x + y_1\omega_y + z_1\omega_z)(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1)dm$$

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.3.-Momento Cinético

$$\int_{\forall} \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})dm = \int_{\forall} (r^2\vec{\omega} - (\vec{r}\vec{\omega})\vec{r})dm = \int_{\forall} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(\omega_x \vec{i}_1 + \omega_y \vec{j}_1 + \omega_z \vec{k}_1)dm - \int_{\forall} (x_1\omega_x + y_1\omega_y + z_1\omega_z)(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1)dm$$

Desarrollando la componente i:

$$\vec{i}_1 : \int_{\forall} ((x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\omega_x - x_1^2\omega_x - x_1y_1\omega_y - x_1z_1\omega_z)dm = \omega_x \underbrace{\int_{\forall} (y_1^2 + z_1^2)dm}_{I_X} - \omega_y \underbrace{\int_{\forall} x_1y_1dm}_{P_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int_{\forall} x_1z_1dm}_{P_{xz}} =$$

$$= I_x\omega_x - P_{xy}\omega_y - P_{xz}\omega_z$$

Por analogía:

$$j_1 := -P_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - P_{yz}\omega_z$$
$$k_1 := -P_{zx}\omega_x - P_{zy}\omega_y + I_z\omega_z$$

Es decir:

$$\int_{\forall} \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})dm = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.3.-Momento Cinético

Por tanto:

$$\boxed{\vec{L}_O = M\vec{r}_G \wedge \vec{v}_O + \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = M\vec{r}_G \wedge \vec{v}_O + I\vec{\omega}}$$

Todos los vectores de esta ecuación están escritos en el sistema móvil

Si el sistema de referencia móvil lo situamos en G $\Rightarrow \vec{r}_G = 0$

o el origen del sistema de referencia móvil es fijo $\Rightarrow \vec{v}_O = 0$

$$\boxed{\vec{L}_O = I\vec{\omega}}$$

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.3.-Momento Cinético

Si, además, los ejes móviles son principales de inercia (Pxy=Pxz=Pyz=0):

$$\boxed{\vec{L}_O = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_x \omega_x \vec{i}_1 + I_y \omega_y \vec{j}_1 + I_z \omega_z \vec{k}_1}$$

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.4.-Teorema del Momento Cinético

Si calculamos la variación del momento cinético en el tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \int_{\forall} \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v}}_{\vec{v} \wedge \vec{v} = 0} dm + \int_{\forall} \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} dm = \int_{\forall} \vec{r} \wedge \vec{a} dm = \int_{\forall} \vec{r} \wedge \frac{(\vec{F}_i + \vec{f}_i)}{dm} dm = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_O^{ext}$$

$$\boxed{\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}}$$

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.4.-Teorema del Momento Cinético. Consecuencias

Si el mom. cinético está escrito en el sistema móvil, que es lo más sencillo, y éste está situado en G, su derivada será:

$$\frac{d\,^1\vec{L}_O}{dt} = \boxed{\frac{\delta\,^1\vec{L}_O}{dt}} + {}^1\vec{\omega} \wedge {}^1\vec{L}_O = I\,^1\vec{\alpha} + {}^1\vec{\omega} \wedge {}^1\vec{L}_O$$

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\,^1\vec{\alpha}$$

$$\boxed{{}^1\vec{M}_O^{ext} = I\,^1\vec{\alpha} + {}^1\vec{\omega} \wedge {}^1\vec{L}_O}$$

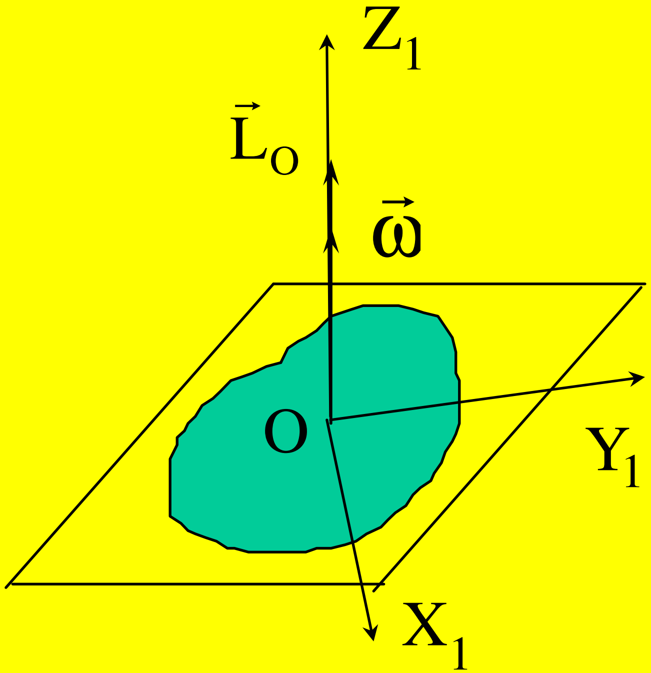
I: matriz de inercia

O es un punto fijo ó el c.d.g.

LECCION 9: DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

9.4.-Teorema del Momento Cinético. Aplicación

Si el movimiento es plano, y el sistema móvil está situado en G:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}_1 \\ \vec{L}_O = I_z \omega_z \vec{k}_1\end{array}\right| \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O = 0$$

$$\boxed{{}^1\vec{M}_O^{ext} = I\,{}^1\vec{\alpha}}$$

En módulos: ${}^1M_O^{ext} = I\alpha$