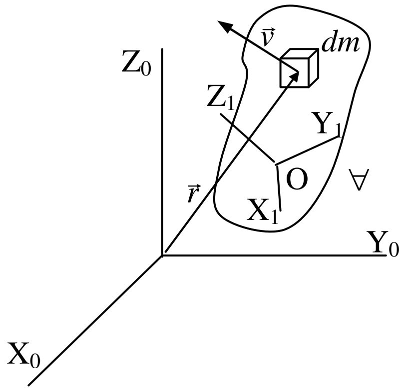
LECCIÓN 9. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

9.1. MOVIMIENTO DEL C.D.G. DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Sean $\underset{i=1..n}{\vec{F}_i}$ las fuerzas exteriores que actúan sobre un elemento de un sólido rígido (incluso las procedentes de las ligaduras del sólido), y $\vec{f}_i$ las fuerzas provenientes de los elementos adyacentes al considerado. Evidentemente, $\sum\limits_{\forall}\vec{F}_i$ es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido, y $\sum\limits_{\forall}\vec{f}_i = 0$, ya que según la tercera ley de Newton, la fuerza que un elemento de un sólido ejerce sobre el adyacente es igual y de sentido contrario a la que el segundo ejerce sobre el primero.



Aplicando la ecuación general de la dinámica a un elemento de masa dm del sólido, suponiéndolo puntual, y llamando $\vec{r}$ al vector de posición del elemento considerado respecto de un sistema de referencia indisolublemente ligado al sólido (1), tenemos que $dm\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{f}_i$ e integrando para todo el sólido:

$$\int\limits_{\forall} dm\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum\limits_{\forall}\vec{F}_i + \sum\limits_{\forall}\vec{f}_i = \sum\limits_{\forall}\vec{F}_i \quad \text{ya que} \quad \sum\limits_{\forall}\vec{f}_i = 0,$$

y

$$\int\limits_{\forall} dm\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\int\limits_{\forall}\vec{r}dm\right] = \frac{d^2}{dt^2}\left[\vec{r}_G M\right] = M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = M\vec{a}_G$$

Luego $$\boxed{\sum\limits_{\forall}\vec{F}_i = M\vec{a}_G} \qquad (9.1)$$

Es decir, que el c.d.g. de un sólido rígido se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en él, y la resultante de todas las fuerzas actuara sobre el mismo.

9.2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO. TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La cantidad de movimiento de un sólido se puede calcular como la suma de la correspondiente a cada una de las partículas del sólido, de masa dm:

$$\vec{p} = \int_{\forall} d\vec{p} = \int_{\forall} \vec{v}dm = \int_{\forall} \frac{d\vec{r}}{dt}dm = \frac{d}{dt}(\int_{\forall} \vec{r}dm) = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_G\right) = M\vec{v}_G \Rightarrow \vec{p} = M\vec{v}_G$$

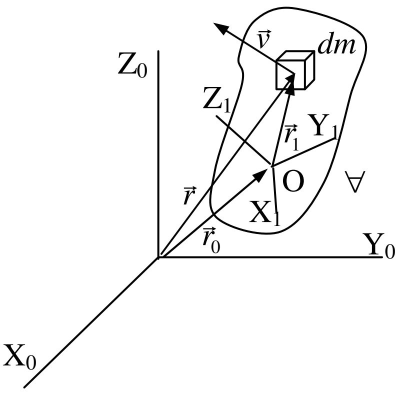
Y, además, la variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas: (Teorema de la cantidad de movimiento):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_G\right) = M\vec{a}_G = \sum_{\forall} \vec{F}_i \Rightarrow \boxed{\sum_{\forall} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

9.3. MOMENTO CINÉTICO.

Se define el momento cinético, momento angular ó momento de la cantidad de movimiento de un sólido rígido respecto de un punto O cualquiera, $\vec{L}_O$, como:

$$\vec{L}_O = \int_{\forall} \vec{r}'\wedge\vec{v}dm$$



Si $\vec{r}'$ y $\vec{v}$ se expresan en el sistema de referencia unido al sólido (1), $\vec{L}_O$ estará expresado en este mismo sistema móvil, ${}^1\vec{L}_O$. En adelante, aunque no lo indiquemos expresamente, siempre trabajaremos en el sistema de referencia móvil.

Calculemos $\vec{L}_O$. Si aplicamos la ecuación $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$, resulta:

$$\vec{L}_O = \int_{\forall} \vec{r}'\wedge\vec{v}dm = \int_{\forall} \vec{r}'\wedge(\vec{v}_O + \vec{\omega}\wedge\vec{r}')dm = \int_{\forall} \vec{r}'\wedge\vec{v}_O dm + \int_{\forall} \vec{r}'\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}')dm$$

* El primer término del segundo miembro de la ecuación anterior, como $\vec{v}_O$ es constante en el dominio de integración ∀, queda:

$$\int_{\forall} \vec{r}'\wedge\vec{v}_O dm = (\int_{\forall} \vec{r}'dm)\wedge\vec{v}_O = M\vec{r}_G\wedge\vec{v}_O$$

siendo $\vec{r}_G$ el vector de posición del c.d.g. del sólido respecto del sistema de referencia con origen en O.

* En cuanto al segundo término de la ecuación anterior, si desarrollamos el doble producto vectorial y llamamos ${}^{1}\vec{r}' = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$ y ${}^{1}\vec{\omega} = \omega_x\vec{i}_1 + \omega_y\vec{j}_1 + \omega_z\vec{k}_1$, queda:

$$\int_{\forall}\vec{r}'\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}')dm = \int_{\forall}(r'^2\,\vec{\omega}-(\vec{r}'\vec{\omega})\vec{r}')dm = \int_{\forall}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(\omega_x\vec{i}_1+\omega_y\vec{j}_1+\omega_z\vec{k}_1)dm -$$
$$-\int_{\forall}(x_1\omega_x+y_1\omega_y+z_1\omega_z)(x_1\vec{i}_1+y_1\vec{j}_1+z_1\vec{k}_1)dm$$

Si, en esta ecuación, desarrollamos la componente según el unitario $\vec{i}_1$, nos quedará:

$$\vec{i}_1: \int_{\forall}((x_1^2+y_1^2+z_1^2)\omega_x - x_1^2\omega_x - x_1y_1\omega_y - x_1z_1\omega_z)dm = \omega_x\int_{\forall}(y_1^2+z_1^2)dm - \omega_y\int_{\forall}x_1y_1dm -$$
$$-\omega_z\int_{\forall}x_1z_1dm = I_x\omega_x - P_{xy}\omega_y - P_{xz}\omega_z$$

De forma análoga, desarrollando las otras dos componentes y agrupando todos los términos, nos quedaría:

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_G\wedge\vec{v}_O + \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix} = M\vec{r}_G\wedge\vec{v}_O + I\vec{\omega}$$

I es el llamado tensor ó matriz de inercia del sólido rígido respecto de los ejes elegidos y centrados en O.

Si, para simplificar la ecuación anterior, elegimos el punto O de tal forma que ó coincide con el c.d.g. del sólido, en cuyo caso O≡G⇒$\vec{r}_G = 0$, ó que O es fijo, en cuyo caso $\vec{v}_O = 0$, quedaría que

$$\boxed{\vec{L}_O = I\vec{\omega}} \qquad (9.2)$$

Si, además, los ejes considerados son principales de inercia, ó paralelos a ellos, la matriz de inercia es diagonal, por lo que la ecuación anterior quedaría:

$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix} = I_x\omega_x\vec{i}_1 + I_y\omega_y\vec{j}_1 + I_z\omega_z\vec{k}_1$$

9.4. TEOREMA DEL MOMENTO CINETICO. CONSECUENCIAS.

Si calculamos la variación con el tiempo de $\vec{L}_O$, tenemos:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \int_\forall \frac{d\vec{r}'}{dt} \wedge \vec{v}dm + \int_\forall \vec{r}' \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}dm$$

Si tenemos en cuenta que $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_0$, que $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ y que $\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_G$ entonces los dos términos de la ecuación anterior quedan:

* $$\int_\forall \frac{d\vec{r}'}{dt} \wedge \vec{v}dm = \int_\forall (\vec{v} - \vec{v}_0) \wedge \vec{v}dm = -\int_\forall \vec{v}_0 \wedge (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}')dm = -\vec{v}_0 \wedge (\vec{\omega} \wedge \int_\forall \vec{r}'dm) =$$

$$= -\vec{v}_0 \wedge (\vec{\omega} \wedge M\vec{r}_G) = -M\vec{v}_0 \wedge (\vec{v}_G - \vec{v}_O) = M\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O$$

* $$\int_\forall \vec{r}' \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \int_\forall \vec{r}' \wedge \vec{a}dm = \int_\forall \vec{r}' \wedge \frac{\sum_i (\vec{F}_i + \vec{f}_i)}{dm}dm = \sum_i \vec{M}_i = \sum \vec{M}_O^{ext}$$

Por lo que queda:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = M\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \sum \vec{M}_O^{ext}}$$

Esta ecuación se simplifica notablemente, igual que hemos visto anteriormente, cuando elegimos el punto O de modo que sea fijo ($\vec{v}_O = 0$) o bien que coincida con G ($\vec{v}_0 = \vec{v}_G$); en ambos casos se anula el primer término, y resulta:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{ext}}$$

Es decir, que **la variación, en el tiempo, de $\vec{L}_O$ es igual al momento exterior total aplicado al sólido respecto de un punto O fijo o coincidente con G** (Teorema del momento cinético).

Si el momento cinético está expresado en el sistema de referencia móvil (1), su derivada sería, teniendo en cuenta que la matriz de inercia I es constante:

$$\frac{d\,{}^1\vec{L}_O}{dt} = \frac{\delta\,{}^1\vec{L}_O}{dt} + {}^1\vec{\omega} \wedge {}^1\vec{L}_O = I\,{}^1\vec{\alpha} + {}^1\vec{\omega} \wedge {}^1\vec{L}_O$$

Y por tanto, si el punto O elegido es el c.d.g. ó un punto fijo:

$$\boxed{\sum {}^{1}\vec{M}_{O}^{ext} = I^{1}\vec{\alpha} + {}^{1}\vec{\omega} \wedge {}^{1}\vec{L}_{O}} \qquad (9.3)$$

siendo $\sum {}^{1}\vec{M}_{O}^{ext}$ el sumatorio de los momentos de las fuerzas exteriores (incluso las reacciones) respecto de O, expresado en el sistema móvil.

9.4.1. Aplicación: Movimiento plano.

Si el movimiento se produce en un plano, el vector velocidad angular, $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento, y sólo tiene una componente, que llamaremos ω. Por otra parte, siendo el punto O el c.d.g. ó un punto fijo, y llamando I al m.d.i. de la figura plana respecto del eje que pasa por O y es perpendicular al plano del movimiento, es $L_O = I\omega$, además de ser $\vec{L}_O$ paralelo a $\vec{\omega}$, por lo que $\vec{\omega} \wedge \vec{L}_O = 0$; por tanto

$$\boxed{\sum {}^{1}\vec{M}_{O}^{ext} = I^{1}\vec{\alpha}}$$

ó, en módulos

$$\boxed{\sum {}^{1}M_{O}^{ext} = I\alpha}$$

Es necesario recordar, otra vez, que esta ecuación sólo es válida si el punto O es el c.d.g. del sólido, ó un punto fijo.

9.5. SISTEMA FORMADO POR VARIOS SÓLIDOS

Cuando un sistema está formado por varios sólidos unidos entre ellos, se puede aplicar el principio de aislamiento, aplicando a cada uno de los sólidos los esfuerzos que los demás ejercen sobre él, incluyendo los accionadores si los hubiere.

Una vez aislados todos y cada uno de los sólidos intervinientes en el mecanismo, y conocido el diagrama de fuerzas resultantes para cada uno de ellos en el c.d.g. ó en un punto fijo (si lo hubiere), se aplican a cada sólido la ecuación (9.1) y la ecuación (9.3), habiéndose calculado previamente la aceleración lineal del punto elegido, y la aceleración angular del sólido (ambas son valores absolutos, es decir, respecto del sistema fijo, aunque conviene escribirlas en el sistema móvil de cada sólido). Del sistema de ecuaciones resultante se calculan las reacciones y esfuerzos actuantes sobre cada elemento del mecanismo.

<u>BIBLIOGRAFIA:</u>

Meriam, J.L., "Dinámica", Capítulo 8, Ed. Reverté, 2ª ed., Barcelona, 1988.