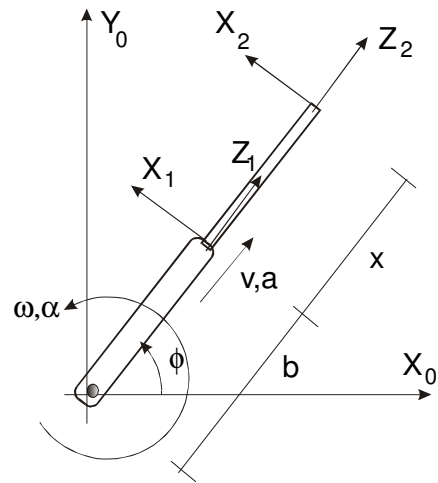


APÉNDICE: CASO DE APLICACIÓN

La figura muestra un brazo articulado sencillo, compuesto por dos elementos, que se mueve en el plano del papel. La primera articulación es giratoria, siendo ω la velocidad angular y α la aceleración angular de la articulación en el instante mostrado, y ϕ el ángulo formado en dicho instante con la horizontal. La longitud del primer elemento es b .



La segunda articulación es prismática, siendo v la velocidad y a la aceleración lineales de dicha articulación en el instante considerado; en dicho instante, el segundo elemento del brazo tiene una longitud x .

A partir de estos datos, y tomando como sistema de referencia fijo el 0 calculemos, según el procedimiento descrito, la aceleración lineal de cada uno de los centros de gravedad de los dos elementos del brazo, supuestos estos lineales y homogéneos (es decir, con los c.d.g. en el punto medio de cada uno de ellos) (los sistemas de referencia 1 y 2 no son datos).

RESOLUCION:

1.- Problema geométrico

En primer lugar, según las recomendaciones dadas en la lección 4, situaremos los sistemas de referencia unidos a cada uno de los elementos del brazo; el sistema 1 que se moverá solidariamente con el elemento 1, y el sistema 2 que lo hará con el elemento 2.

A partir de ellos podemos escribir las respectivas matrices de transformación homogénea:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \phi & 0 & \operatorname{cos} \phi & b \operatorname{cos} \phi \\ \operatorname{cos} \phi & 0 & \operatorname{sen} \phi & b \operatorname{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y \quad {}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \phi & 0 & \operatorname{cos} \phi & (b+x) \operatorname{cos} \phi \\ \operatorname{cos} \phi & 0 & \operatorname{sen} \phi & (b+x) \operatorname{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.- Problema cinemático

Para resolver el problema cinemático, utilizaremos el procedimiento propuesto en el punto 6.5 de la lección 6. Para ello, lo más recomendable es construir una tabla donde se van poniendo todas las magnitudes conocidas y las que vamos calculando y que necesitaremos en los pasos posteriores. Empezaremos escribiendo en dicha tabla las magnitudes que son datos del problema:

i	${}^{i+1}\vec{v}_{i+1/i}^{rel}$	${}^{i+1}\vec{a}_{i+1/i}^{rel}$	${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1/i}$	${}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1/i}$	${}^{i+1}\vec{r}_{i+1}$	${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1}$	${}^{i+1}\vec{v}_{i+1}$	${}^{i+1}\vec{\alpha}_{i+1}$	${}^{i+1}\vec{a}_{i+1}$	${}^{i+1}\vec{r}_{G_{i+1}}$	${}^{i+1}\vec{a}_{G_{i+1}}$
0	0	0	$\vec{\omega}_j$	$\vec{\alpha}_j$	$b\vec{k}_1$					$-b/2\vec{k}_1$	
1	$v\vec{k}_2$	$a\vec{k}_2$	0	0	$x\vec{k}_2$					$-x/2\vec{k}_2$	

Ahora iremos calculando cada una de las columnas vacías de esta tabla:

Como $\vec{\omega}_0 = 0$ ${}^1\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + {}^1\vec{\omega}_{1/0} = \vec{\omega}_j$ y ${}^2\vec{\omega}_2 = {}^2\vec{\omega}_1 + {}^2\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_j$

Como $\vec{v}_0 = 0$ ${}^1\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + {}^1\vec{v}_{1/0}^{rel} + {}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{r}_1 = \omega b\vec{i}_1$
y ${}^2\vec{v}_2 = {}^2\vec{v}_1 + {}^2\vec{v}_{2/1}^{rel} + {}^2\vec{\omega}_2 \wedge {}^2\vec{r}_2 = \omega(b+x)\vec{i}_2 + v\vec{k}_2$

Como $\vec{\alpha}_0 = 0$ ${}^1\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_0 + {}^1\vec{\alpha}_1 \wedge {}^1\vec{\omega}_{1/0} + {}^1\vec{\alpha}_{1/0} = \vec{\alpha}_j$
y ${}^2\vec{\alpha}_2 = {}^2\vec{\alpha}_1 + {}^2\vec{\omega}_2 \wedge {}^2\vec{\omega}_{2/1} + {}^2\vec{\alpha}_{2/1} = \vec{\alpha}_j$

Como $\vec{a}_0 = 0$

${}^1\vec{a}_1 = \vec{a}_0 + {}^1\vec{a}_{1/0}^{rel} + 2{}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{v}_{1/0}^{rel} + {}^1\vec{\alpha}_1 \wedge {}^1\vec{r}_1 + {}^1\vec{\omega}_1 \wedge ({}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{r}_1) = \alpha b\vec{i}_1 - \omega^2 b\vec{k}_1$ y

${}^2\vec{a}_2 = {}^2\vec{a}_1 + {}^2\vec{a}_{2/1}^{rel} + 2{}^2\vec{\omega}_2 \wedge {}^2\vec{v}_{2/1}^{rel} + {}^2\vec{\alpha}_2 \wedge {}^2\vec{r}_2 + {}^2\vec{\omega}_2 \wedge ({}^2\vec{\omega}_2 \wedge {}^2\vec{r}_2) = (\alpha(b+x) + 2\omega v)\vec{i}_2 + (a - \omega^2(b+x))\vec{k}_2$

y ${}^1\vec{a}_{G_1} = {}^1\vec{a}_1 + {}^1\vec{\alpha}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{G_1} + {}^1\vec{\omega}_1 \wedge ({}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{G_1}) = \frac{1}{2}\alpha b\vec{i}_1 - \frac{1}{2}\omega^2 b\vec{k}_1$

y ${}^2\vec{a}_{G_2} = {}^2\vec{a}_2 + {}^2\vec{\alpha}_2 \wedge {}^2\vec{r}_{G_2} + {}^2\vec{\omega}_2 \wedge ({}^2\vec{\omega}_2 \wedge {}^2\vec{r}_{G_2}) = (\alpha(b + \frac{x}{2}) + 2\omega v)\vec{i}_2 + (a - \omega^2(b + \frac{x}{2}))\vec{k}_2$

3.- Problema estático

Ahora supongamos que el brazo analizado soporta en su extremo una masa M, siendo m la masa por unidad de longitud de los elementos que conforman el brazo. ¿Qué esfuerzos deberán soportar las articulaciones para que el brazo esté en equilibrio en la posición indicada?. (No tendremos en cuenta, en las articulaciones prismáticas, el trozo de elemento que pueda quedar oculto dentro de otro).

Para resolver este problema, debemos comenzar aislando la masa transportada, supuesta ésta como un punto material actuando en la mano del brazo y escribiendo la ecuación de equilibrio en el sistema de referencia ligado a la masa (Sistema 2). Dicha masa está sometida a la fuerza con que la mano

sujeta la masa, \vec{F}_{2M} y a su propio peso (Mg). Puesto que el peso actúa en la dirección vertical (Y_0), será necesario escribirlo en el sistema de referencia 2:

$${}^2\vec{p}_M = {}^2R_0 {}^0\vec{p}_M = \begin{pmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Mg \cos\phi \\ 0 \\ -Mg \sin\phi \end{pmatrix}$$

Si llamamos F_{2MX} y F_{2MZ} a las componentes de \vec{F}_{2M} , la ecuación de equilibrio se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} F_{2MX} \\ 0 \\ F_{2MZ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Mg \cos\phi \\ 0 \\ -Mg \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esta ecuación da lugar a dos ecuaciones desacopladas, de las que se pueden calcular las componentes de \vec{F}_{2M} , resultando

$$F_{2MX} = Mg \cos\phi \quad \text{y} \quad F_{2MZ} = Mg \sin\phi$$

Puesto que hemos supuesto M como un punto material, la ecuación de equilibrio de momentos es innecesaria.

Ahora debemos aislar el elemento 2 del brazo, y dibujar el diagrama de sólido libre con todas las fuerzas actuantes sobre él. De estas fuerzas consideraremos, en primer lugar, el peso propio mxg , en dirección vertical, que habrá que escribir en el sistema propio del elemento (2):

$${}^2\vec{p}_2 = {}^2R_0 {}^0\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -mxg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mxg \cos\phi \\ 0 \\ -mxg \sin\phi \end{pmatrix}$$

En segundo lugar actuará la fuerza que la masa M hace sobre el elemento \vec{F}_{M2} , igual y de sentido contrario a la que el elemento 2 hace sobre la masa, \vec{F}_{2M} y ya calculada, por lo que $\vec{F}_{M2} = -\vec{F}_{2M} = -Mg \cos\phi \vec{i}_2 - Mg \sin\phi \vec{k}_2$

Finalmente, habrá que considerar los esfuerzos que el elemento 1 ejerce sobre el 2, y que se concretan en una fuerza que llamaremos \vec{F}_{12} de componentes F_{12X} y F_{12Z} y un momento, Q_{12} en la dirección del eje Y_2 .

Así, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos quedan:

$$\text{Fuerzas:} \quad \begin{pmatrix} F_{12X} \\ 0 \\ F_{12Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Mg \cos\phi \\ 0 \\ -Mg \sin\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mxg \cos\phi \\ 0 \\ -mxg \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Momentos respecto del c.d.g: $\vec{F}_{M2} \wedge \frac{x}{2} \vec{k}_2 + \vec{F}_{12} \wedge (-\frac{x}{2} \vec{k}_2) + \vec{Q}_{12} = 0$ que desarrollando su única componente no nula (Y) queda:

$$-Mg \frac{x}{2} \cos \phi - F_{12x} \frac{x}{2} + Q_{12} = 0$$

Esta última ecuación, junto al sistema de ecuaciones de fuerzas anterior, conforman un sistema de ecuaciones desacopladas, de las que se pueden calcular las fuerzas de reacción desconocidas:

$$F_{12x} = (M + mx)g \cos \phi \quad F_{12z} = (M + mx)g \sin \phi \quad Q_{12} = (M + \frac{mx}{2})xg \cos \phi$$

Ahora procederíamos de forma análoga aislando el elemento 1, siendo las fuerzas que actúan sobre él:

* La fuerza y momento que el elemento 2 hace sobre el 1,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -(M + mx)g \cos \phi \vec{i}_2 - (M + mx)g \sin \phi \vec{k}_2$$

$$\vec{Q}_{21} = -\vec{Q}_{12} = -(M + \frac{mx}{2})xg \cos \phi \vec{j}_2$$

* El peso propio del elemento 1

$${}^1\vec{p}_1 = {}^1R_0 {}^0\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -mbg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mbg \cos \phi \\ 0 \\ -mbg \sin \phi \end{pmatrix}$$

* La fuerza y el momento de enlace en la articulación giratoria, \vec{F}_{01} y \vec{Q}_{01}

Planteando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos respecto del c.d.g. del elemento:

$$\text{Fuerzas:} \quad \begin{pmatrix} F_{01x} \\ 0 \\ F_{01z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(M + mx)g \cos \phi \\ 0 \\ -(M + mx)g \sin \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mbg \cos \phi \\ 0 \\ -mbg \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Momentos:} \quad -(M + mx)g \frac{b}{2} \cos \phi - F_{01x} \frac{b}{2} + Q_{01} = 0$$

Calculando F_{01x} y F_{01z} de ecuación de fuerzas, y sustituyendo en la de momentos, resulta:

$$F_{01x} = (M + m(x + b))g \cos \phi \quad F_{01z} = (M + m(x + b))g \sin \phi \quad Q_{12} = (M + m(x + \frac{b}{2}))gb \cos \phi$$

4.- Problema dinámico:

El problema dinámico se resuelve de modo análogo al problema estático, con la única diferencia de que las ecuaciones dinámicas conducen a ecuaciones en las que los sumatorios de fuerzas y momentos no se anulan, sino que están relacionados con las aceleraciones lineales de los c.d.g. y las aceleraciones angulares y matrices de inercia de cada uno de los elementos del brazo. Por este motivo, y con el fin de evitar ecuaciones demasiado engorrosas de manejar, asignaremos valores numéricos a los datos del problema, tomando:

$$\begin{array}{llllll} b = 2 \text{ m} & \omega = 2 \text{ rad/s} & v = 1 \text{ m/s} & \varphi = \pi/4 \text{ rad} & & \\ x = 1 \text{ m} & \alpha = 1 \text{ rad/s}^2 & a = 1 \text{ m/s}^2 & M = 100 \text{ Kg} & m = 5 \text{ Kg/m} & \end{array}$$

Con estos datos, los valores ya calculados resultan:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0T_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\vec{\omega}_1 = 2\vec{j}_1 \quad {}^2\vec{\omega}_2 = 2\vec{j}_2 \quad {}^1\vec{\alpha}_1 = \vec{j}_1 \quad {}^2\vec{\alpha}_2 = \vec{j}_2$$

$${}^1\vec{a}_{G1} = \vec{i}_1 - 4\vec{k}_1 \quad {}^2\vec{a}_{G2} = 6,5\vec{i}_2 - 9\vec{k}_2 \quad {}^2\vec{a}_2 = 7\vec{i}_2 - 11\vec{k}_2$$

Empezaremos, como antes, por la masa transportada:

$${}^2\vec{p}_M = {}^2R_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500\sqrt{2} \\ 0 \\ -500\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La ecuación de fuerzas es :

$$\sum \vec{F} = M {}^2\vec{a}_2 \begin{cases} -500\sqrt{2} + F_{2Mx} = 100 \cdot 7 \\ -500\sqrt{2} + F_{2Mz} = -100 \cdot 11 \end{cases}$$

Y de aquí: $F_{2Mx} = 1407 \text{ N}$ y $F_{2Mz} = -393 \text{ N}$

Pasando al elemento 2:

$$\vec{F}_{M2} = -\vec{F}_{2M} = -1407\vec{i}_2 + 393\vec{k}_2 \quad {}^2\vec{p}_2 = {}^2R_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25\sqrt{2} \\ 0 \\ -25\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F} = M^2 \vec{a}_{G_2} \left\{ \begin{array}{l} -1407 - 25\sqrt{2} + F_{12x} = 5 \cdot 6,5 \Rightarrow F_{12x} = 1475 \\ -393 - 25\sqrt{2} + F_{12z} = -5 \cdot 9 \Rightarrow F_{12z} = -402 \end{array} \right\}$$

$$\sum \vec{M}_{G_2} = I_2^2 \vec{\alpha}_2 \left\{ -1407 \cdot 0,5 - 1475 \cdot 0,5 + Q_{12y} = \frac{1}{12} 5 \cdot 1^2 \Rightarrow Q_{12y} = 1441 \right\}$$

Y pasando al elemento 1:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -1475\vec{i}_2 + 402\vec{k}_2 \quad {}^1\vec{p}_1 = {}^1R_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50\sqrt{2} \\ 0 \\ -50\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F} = M^1 \vec{a}_{G_1} \left\{ \begin{array}{l} -1475 - 50\sqrt{2} + F_{01x} = 10 \cdot 1 \Rightarrow F_{01x} = 1556 \\ 402 - 50\sqrt{2} + F_{01z} = -10 \cdot 4 \Rightarrow F_{01z} = -371 \end{array} \right\}$$

$$\sum \vec{M}_{G_1} = I_1^1 \vec{\alpha}_1 \left\{ -1475 \cdot 1 + 1556 \cdot (-1) + Q_{01y} = \frac{1}{12} 10 \cdot 2^2 \Rightarrow Q_{01y} = 3028 \right\}$$

Así pues, las potencias que deben desarrollar los accionadores de cada una de las articulaciones serán:

- Articulación prismática: $P_{pris} = F_{12z} \cdot v = 402 \cdot 1 = 402 \text{ w}$
- Articulación giratoria: $P_{gira} = Q_{12y} \cdot \omega_{1/0} = 1441 \cdot 2 = 2882 \text{ w}$