PROBLEMAS PARA SER RESUELTOS EN EL AULA

El asterisco indica el nivel de dificultad: * Alguna dificultad: ** Nivel Avanzado

Lección 0. Prerrequisitos

0.1. Obtén un vector unitario perpendicular a los vectores $2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ y $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

Solución:

$$(2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -6\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$$

$$\left|3\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}\right|=\sqrt{3^2+4^2+1^2}=\sqrt{26} \qquad \vec{u}=\pm\frac{3\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{26}}$$

0.2 a) Calcula la integral del vector $\vec{v}=2xy\vec{i}+3\vec{j}-2z^2\vec{k}$ a lo largo de la línea recta paralela al eje Y entre los puntos A(1,1,1) y B(1,3,1) (circulación de un vector a lo largo de una línea).

b) Repite el cálculo anterior pero considerando el vector $\vec{v}=2xy\vec{i}+3x\vec{j}-2z^2\vec{k}$.

c) Si es posible, repite el ejercicio b) pero a lo largo de la línea recta que va de A hasta C (3,3,1).

Solución:

a) La línea que va de A a B es una línea recta paralela al eje Y. Entonces $d\vec{r}=dy\vec{j}$

$$\int_A^B \vec{v}d\vec{r}=\int_A^B(2xy\vec{i}+3\vec{j}-2z^2\vec{k})dy\vec{j}=\int_1^3 3dy=3(3-1)=6$$

b) $$\int_A^B \vec{v}d\vec{r}=\int_A^B(2xy\vec{i}+3x\vec{j}-2z^2\vec{k})dy\vec{j}=\int_1^3 3xdy$$

Como x es constante (x=1) a lo largo de la línea AB, entonces $\int_1^3 3xdy=\int_1^3 3dy=3(3-1)=6$

c) Ahora, la línea que va de A a C no es paralela al eje Y, y entonces $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$. Su ecuación es x=y. Por tanto

$$\int_A^C \vec{v}d\vec{r}=\int_A^C(2xy\vec{i}+3x\vec{j}-2z^2\vec{k})(dx\vec{i}+dy\vec{j})=\int_A^C(2xydx+3xdy)=\int_1^3 2x^2dx+\int_1^3 3ydy=$$

$$=2\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3+3\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^3=\frac{2}{3}26+\frac{3}{2}8=\frac{104+72}{6}=\frac{176}{6}=\frac{88}{3}$$

0.3 Encuentra la integral del vector $\vec{v}=2xy\vec{i}+3\vec{j}-2z^2\vec{k}$ a través de un cuadrado de lado *h* paralelo al plano XY y colocado en el plano *z=1* (integral de un vector a través de una superficie).

Solución:

El vector representativo del cuadrado será $d\vec{S}=dS\vec{k}$ (pueda ser también tomado $d\vec{S}=-dS\vec{k}$)

$$\int_{cuadrado}\vec{v}d\vec{S}=\int_{cuadrado}(2xy\vec{i}+3\vec{j}-2z^2\vec{k})dS\vec{k}=-\int_{cuadrado}2z^2dS$$

Como el cuadrado se encuentra sobre el plano z=1

$$-\int_{cuadrado}2z^2dS=-\int_{cuadrado}2dS=-2\int_{cuadrado}dS=-2S_{cuadrado}=-2h^2$$

Si hubiéramos considerado $d\vec{S}=-dS\vec{k}$, entonces $\int_{cuadrado}\vec{v}d\vec{S}=2h^2$

Ambos resultados son válidos.

0.4 Calcula:

a) La circulación del vector $\vec{v}=r\vec{u}_r$ a lo largo de cualquier circunferencia de radio *2* centrada en el origen de coordenadas.

b) La integral del vector $\vec{v}=r\vec{u}_r$ a través de una esfera de radio *2* centrada en el origen de coordenadas.

c) La circulación del vector $\vec{v}=r\vec{u}_r$ a lo largo de cualquier radio de la esfera anterior entre dos puntos con radios *r =0* y r= *2*.

Solución:

a) El vector $\vec{V}$ va en la dirección del radio de la circunferencia, por lo que es perpendicular a la tangente a la circunferencia en cualquier punto de ella. Así que

$$\int_{circunferencia}\vec{v}d\vec{r}=0$$

b) Ahora, el vector $\vec{V}$ es siempre paralelo al vector superficie de la esfera ($d\vec{S}=dS\vec{u}_r$). Además r=2 , por lo que

$$\int_{esfera}\vec{v}d\vec{S}=\int_{esfera}r\vec{u}_rdS\vec{u}_r=\int_{esfera}rdS=2\int_{esfera}dS=2\cdot 4\pi 2^2=32\pi$$

c) $$\int_{radio}\vec{v}d\vec{r}=\int_{radio}r\vec{u}_rdr\vec{u}_r=\int_0^2 rdr=\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^2=2$$

Lección 1: Electrostática

1.1 a) Calcula el campo eléctrico producido en el punto (4,0) m por dos cargas puntuales: 2 μC en (0,0) m y -2 μC en (0,3) m. Calcula la fuerza que actúa sobre una carga de -5 μC colocada en el punto (4,0) m.
b) Repite el ejercicio anterior pero colocando la carga en el punto (4,4) m en lugar del punto (4,0) m.

Solución:

a) $\vec{E}_2 = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = 9\cdot10^9\,\frac{2\cdot10^{-6}}{4^2}\vec{i} = \frac{9}{8}10^3\vec{i}\ N/C$

$$\vec{E}_{-2} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = 9\cdot10^9\,\frac{2\cdot10^{-6}}{5^2}\,\frac{-4\vec{i}+3\vec{j}}{5} = \frac{18}{125}10^3(-4\vec{i}+3\vec{j})\,N/C$$

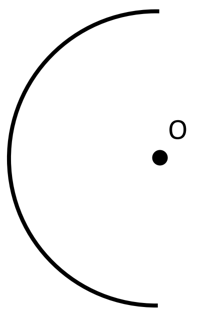
$$\vec{E}_{(4,0)} = \vec{E}_2 + \vec{E}_{-2} = \frac{9}{8}10^3\vec{i} + \frac{18}{125}10^3(-4\vec{i}+3\vec{j}) = 549\vec{i} + 432\vec{j}\ N/C$$

$$\vec{F}_{-5} = -5\cdot10^{-6}\vec{E} = -5\cdot10^{-6}(549\vec{i}+432\vec{j}) = -(2745\vec{i}+2160\vec{j})\cdot10^{-6}\ N$$

b) $\vec{E}_{(4,4)} = k\frac{2\cdot10^{-6}}{32}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}} + k\frac{2\cdot10^{-6}}{17}\frac{(-4\vec{i}-\vec{j})}{\sqrt{17}} = -629\vec{i} + 141\vec{j}\ N/C$

$$\vec{F}_{-5} = -5\cdot10^{-6}\vec{E} = -5\cdot10^{-6}(-629\vec{i}+141\vec{j}) = (3145\vec{i}-705\vec{j})\cdot10^{-6}\ N$$

1.2 ** Una semicircunferencia tienen una carga uniformemente repartida sobre ella. La longitud de la semicircunferencia es de 14 cm, y tiene una carga total de -7,5 μC. Encontrar el valor y dirección del campo eléctrico en el punto O, centro de la semicircunferencia.



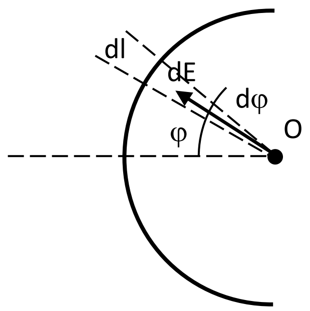
Solución:

En este caso, la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la semicircunferencia. Su distribución lineal de cargo es:

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} = -\frac{7{,}5\cdot10^{-6}}{14\cdot10^{-2}} = -0{,}5357\cdot10^{-4}C/m$$

El radio de la semicircunferencia es:

$$R = \frac{\ell}{\pi} = \frac{14\cdot10^{-2}}{\pi} = 4{,}46\cdot10^{-2}m$$



Solucionaremos el problema con letras, y al final cambiaremos las letras por números. Si consideramos un elemento diferencial de semicircunferencia (longitud dl), la carga contenida en este elemento es: $dq = \lambda d\ell$

El campo eléctrico producido por este elemento infinitesimal en el punto O es: $dE = k\frac{\lambda dl}{R^2}$

Siendo su dirección la de recta que une el elemento infinitesimal y O.

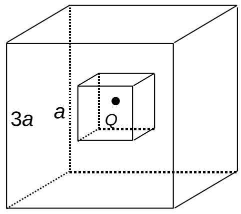
Si consideramos un elemento infinitesimal de semicircunferencia simétrico al de la figura (formando un ángulo -φ con la horizontal), el campo resultante de ambos elementos es un campo eléctrico horizontal dirigido hacia la izquierda, cuya magnitud es:

$$dE_h = 2k\frac{\lambda dl}{R^2}cos\varphi$$

Y el campo eléctrico total en el punto O es la integral de cada elemento infinitesimal de semicircunferencia, teniendo en cuenta que $d\ell = Rd\varphi$:

$$E_h = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2k\frac{\lambda Rd\varphi}{R^2}cos\varphi = \frac{2k\lambda}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\varphi d\varphi = \frac{2k\lambda}{R} = 2{,}16\cdot 10^7\ N/C$$

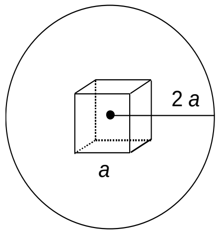
1.3 Sea una carga puntual *Q* y las dos superficies cúbicas, paralelas, centradas en Q, y con lados *a* y 3*a*, mostradas en la figura. Calcular la relación entre los flujos del campo eléctrico a través de ambas superficies (Φ_a/Φ_{3a}). Justificar la respuesta.



Solución:

$$\Phi_a = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_{3a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \frac{\Phi_a}{\Phi_{3a}} = 1$$

1.4 Un cubo de lado *a* y densidad volumétrica uniforme de carga ρ, está colocado en el vacío. Está rodeado por una superficie esférica de radio 2*a*. Calcular el flujo del campo eléctrico a través de la superficie esférica.



Solución:

$$\Phi_{2a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho a^3}{\varepsilon_0}$$

1.5 Calcula el campo eléctrico producido por:

a) Una superficie esférica de radio *R* cargada con densidad superficial de carga σ; calcular el campo eléctrico en un punto situado a una distancia *r* del centro de la esfera, para r<R y r >R.

b) Un plano infinito cargado con densidad superficial de carga homogénea σ.

c) Dos planos infinitos y paralelos cargados con densidades superficiales de carga homogéneas σ, dentro del espacio entre ambos planos y fuera del espacio (aplicando superposición). También considerar el caso en el que las cargas en ambos planos tienen signo diferente.

d) El mismo ejercicio a) pero añadiendo una nueva carga puntual negativa Q en el centro de la esfera. ¿Podría ser nulo el campo eléctrico en algún punto del espacio? ¿En qué circunstancias?

Solución:

a) La carga está distribuida sobre la superficie, sin ninguna carga interior. Por tanto, aplicando el teorema de Gaus a una esfera con radio r:

r<R $$\Phi = \int_{sphere} \vec{E}d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

r>R $$\Phi = \int_{sphere} \vec{E}d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

b) $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

c) Si ambas cargas tienen el mismo signo:

Dentro del espacio entre ambos planos: $E=0$

Fuera del espacio entre ambos planos: $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Si ambas cargas tienen signo diferente:

Dentro del espacio entre ambos planos: $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Fuera del espacio entre ambos planos: $E=0$

d) r<R $$\Phi=\int_{sphere}\vec{E}d\vec{S}=E4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

r>R $$\Phi=\int_{sphere}\vec{E}d\vec{S}=E4\pi r^2=\frac{\sigma 4\pi R^2+Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

El campo eléctrico sólo puede ser cero si $Q=-4\pi\sigma R^2$. En este caso, el campo eléctrico es cero en cualquier punto fuera de la esfera.

1.6 Calcula:

a) El potencial eléctrico en los puntos *A (4,0)* y *B (4,3)* producido por las cargas del ejercicio 1.1: $2\ \mu C$ en *(0,0)* y -2 μC en *(0,3)*.

b) El trabajo necesario para llevar una carga de -3 μC desde A hasta B.

Solución:

a) $$V_A=9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-6}}{4}-9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-6}}{5}=18\cdot10^3(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=900\ V$$

$$V_B=9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-6}}{5}-9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-6}}{4}=18\cdot10^3(\frac{1}{5}-\frac{1}{4})=-900\ V$$

b) $$W=q(V_A-V_B)=-3\cdot10^{-6}(900+900)=-0{,}0054\ J$$

1.7 Calcula la d.d.p. (diferencia de potencial) entre dos puntos A y B del campo eléctrico creado por un plano infinito cargado con densidad superficial de carga σ (siendo d la distancia entre A y B medida perpendicularmente al plano cargado).

Solución:

$$V_A-V_B=\int_A^B\vec{E}d\vec{r}=Ed=\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$$

1.8 Una superficie esférica (radio *R*) está cargada con una densidad superficial de carga homogénea σ (ejercicio 1.5). Calcula:

a) Diferencia de potencial entre los puntos A(radio 2R) y B(radio 3R).
b) Potencial eléctrico en el punto B.
c) Diferencia de potencial entre C(R/3) y D(R/2).
d) Potencial eléctrico en los puntos C y D.
e) El trabajo hecho por el campo eléctrico para llevar una carga *q* de B a A.
f) El trabajo hecho por el campo eléctrico para llevar una carga *q* de A a E(2R) (siendo E un punto diferente de A).

g) Si σ es positiva y añadimos una carga puntual negativa *Q* en el centro de la esfera, ¿es posible encontrar un punto dónde el campo eléctrico sea cero?

Solución:

a) Para aplicar la ley de Gaus consideraremos superficies esféricas para diferentes r:

r<R $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

r>R $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_A - V_B = \int_{2R}^{3R} \vec{E} d\vec{r} = \int_{2R}^{3R} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{6R} = \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}$$

b) $$V_B = \int_{3R}^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_{3R}^{\infty} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{3R} = \frac{\sigma R}{3\varepsilon_0}$$

c) Los puntos C y D están dentro de la superficie esférica, donde el campo eléctrico es nulo, y el potencial eléctrico constante. Entonces $V_C - V_D = \int_{R/3}^{R/2} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R/3}^{R/2} 0 d\vec{r} = 0$

d) Como el potencial eléctrico dentro de la superficie esférica es constante, y el potencial eléctrico es una función continua, el potencial eléctrico en cualquier punto dentro de la superficie esférica será igual al potencial en cualquier punto sobre la propia superficie, donde r=R: $$V_C = V_D = \int_R^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_R^{\infty} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

e) $$W_{BA} = q(V_B - V_A) = -\frac{q\sigma R}{6\varepsilon_0}$$

f) A y E son puntos con radios iguales, colocados sobre una superficie equipotencial. Entonces, el trabajo necesario para llevar cualquier carga de A a E es nulo: $W_{AE} = q(V_A - V_E) = 0$

g) Si añadimos una carga Q en el centro de la superficie esférica, entonces el campo eléctrico en cualquier punto exterior de la superficie esférica será (aplicando el teorema de Gauss):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2 + Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma 4\pi R^2 + Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

El campo eléctrico no es nulo en general. La única posibilidad para que sea cero el campo eléctrico es que $\sigma 4\pi R^2 + Q = 0$, es decir, que $Q = -\sigma 4\pi R^2$. Si σ es positivo, entonces Q tiene que ser negativa.

Sólo para este valor de Q, el campo eléctrico será cero en cualquier punto exterior a la superficie esférica.

Por otro lado, el campo eléctrico no puede ser nulo dentro de la superficie esférica. Sólo ocurrirá cuando Q=0.

1.9 * Los planos *y=-2* y y=*2* tienen, respectivamente, densidades superficiales de carga de *1 μC/m*^{2} y 2 *μC/m*^{2}.

a) Calcula la diferencia de potencial (d.d.p) entre los puntos A(0,3,0) y B(0,5,0), así como el trabajo necesario para llevar una carga de *2 μC* desde A hasta *B*. ¿Quién hace este trabajo, las fuerzas del campo eléctrico o una fuerza externa contra el campo eléctrico?

b) Calcula la diferencia de potencial entre los puntos C(0,0,0) y D(0,1,-1) y el trabajo necesario para llevar una carga puntual de *-2 μC* desde el punto D hasta el punto C.

Solución:

a) $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}d\vec{r} = Ed = (\frac{1\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0})(5-3) = \frac{6\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} = \frac{3\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = 0,339\cdot 10^{6}\ V$

$W_{AB} = q(V_A - V_B) = 2\cdot 10^{-6}\cdot 0,339\cdot 10^{6} = 0,678\ J$ Como este trabajo es positivo, está hecho por las fuerzas de campo eléctrico.

b) $V_C - V_D = \int_C^D \vec{E}d\vec{r} = \int_C^D (-\frac{1\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0}\vec{j})(dy\vec{j} - dz\vec{k}) = -\int_C^D \frac{1\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0}dy = -\frac{1\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} = -56498\ V$

$W_{DC} = q(V_D - V_C) = -2\cdot 10^{-6}\cdot 56498 = -0,113\ J$ Como este trabajo es negativo, está hecho por una fuerza externa, en contra de las fuerzas del campo eléctrico.

Lección 2: Conductores en equilibrio electrostático. Dieléctricos

2.1 Calcula el potencial eléctrico creado por una esfera conductora (radio *R*) cargada con carga *Q*, en un punto situado a una distancia *r>R* del centro de la esfera. Calcular el potencial eléctrico de la esfera.

Solución:

El campo eléctrico en cualquier punto exterior a la esfera es, según la ley de Gauss:

$$\phi = \int_{esfera} \vec{E}d\vec{S} = \int_{esfera} EdS = E\int_{esfera} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Y el potencial eléctrico en este punto es

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E}d\vec{r} = \int_r^{\infty} Edr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

El potencial de la esfera será $V_{esfera} = V(r=R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

2.2 Dos conductores esféricos con radios R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$), el primero con carga Q, y el segundo sin carga, se unen con un cable conductor sin capacidad (es decir, que la influencia eléctrica entre ambas esferas puede ser despreciada). Calcular la carga y el potencial eléctrico de ambas esferas después de unirlas.

Solución:

Antes de que ambas esferas están conectadas, la carga de la primera esfera es Q y su potencial $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

Cuando ambas esferas se conectan, entonces las dos esferas forman un único conductor, y sus potenciales serán iguales. Para ello, la segunda esfera toma una parte de la carga Q de la primera esfera. Si Q_1 y Q_2 son las cargas de ambas esferas después de la conexión, y V es su potencial, se debe verificar que:

$Q_1 + Q_2 = Q$ Y también que $V = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$Q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2} \qquad Q_2 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

2.3 Una carga puntual *q* está situada a una distancia *d* del centro de una esfera conductora de radio *R* y descargada (d>R). a) Calcula el potencial de la esfera. b) Qué ocurre si la esfera está conectada a tierra?

Solución:

a) Si calculamos el potencial en el centro de la esfera: $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

b) Si la esfera está conectada a tierra, su potencial es nulo, V=0. Para ello, la esfera toma alguna carga (Q) de tierra. El potencial de la esfera debido a ambas cargas (q y Q) es, entonces:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0 \Rightarrow Q = -\frac{qR}{d}$$

2.4 Una carga puntual *q* está situada en el centro de un conductor esférico hueco (radios R_1 y R_2) descargado. a) Calcular el campo eléctrico en las diferentes zonas del espacio: $r<R_1$, $R_1<r<R_2$, $r>R_2$. b) Calcular el potencial eléctrico de la esfera. c) ¿Qué ocurre si la esfera está conectada a tierra?

Solución:

a) La carga q induce una carga –q en la superficie interior de la esfera, y por tanto una carga q en la superficie exterior.

$r<R_1$ $$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$R1<r<R_2$ $$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q-q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$r>R_2$ $$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q-q+q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b) El potencial eléctrico de la esfera es $V = \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R_2}^{\infty} E dr = \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

c) Si la esfera está conectada a tierra, tanto su potencial como su campo eléctrico son nulos. Y también fuera de la esfera. Para ello, toda la carga existente en la superficie exterior de la esfera se va a tierra a través de la conexión de tierra. La densidad superficial de carga exterior es cero. Por tanto:

$r>R_1$ ($R_1<r<R_2$ y $r\geq R_2$) E=0

$r<R_1$ $$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Como la esfera está conectada a tierra, su potencial es nulo.

2.5 * Una esfera hueca (radios R_1 y R_2) está conectada a tierra. Una carga puntual *q* está colocada en el centro de la esfera, y otra carga puntual *Q* está colocada en el exterior de la esfera, a una distancia *d* de su centro (d>R). Calcular la carga total de la esfera. (Para solucionar este ejercicio, aplicar el principio de superposición, teniendo en cuenta los resultados de los ejercicios 2.3 y 2.4).

Solución:

Del ejercicio 2.3 (carga exterior Q), la carga en la superficie exterior de la esfera es $-\frac{QR}{d}$ y la carga en la superficie interior es nula.

Del ejercicio 2.4 (carga q en el centro), la carga en la superficie exterior es nula, y la carga en la superficie interior es –q.

Aplicando el principio de superposición, la carga total de la esfera es la debida a ambas superficies:

$$Q_{total} = -q - \frac{QR}{d}$$

2.6 Un generador de Van de Graaf está formado por una esfera conductora de radio *10 cm*. El generador transfiere carga eléctrica a esta esfera desde una segunda esfera más pequeña, de radio *5 cm*. La distancia más próxima entre ambas esferas es de *5 mm*. Asumiendo que el campo eléctrico entre las esferas es uniforme (realmente sólo cambia alrededor del 13%) y que la ruptura dieléctrica del aire se produce cuando el campo eléctrico alcanza un valor de *1 KV/mm*, calcular la carga de cada esfera cuando se produce una chispa entre las esferas (cuando se alcanza la ruptura dieléctrica).

Solución:

Como la carga de la esfera grande proviene de la pequeña, ambas esferas tienen la misma carga (pero signo opuesto): Q y –Q. Por ello, la diferencia de potencial entre ambas esferas es (valor absoluto):

$$\left|V_{grande} - V_{pequeña}\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 10\cdot 10^{-2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 5\cdot 10^{-2}} = Q\cdot 27\cdot 10^{10}$$

Por otro lado, esta diferencia de potencial tiene que ser $\left|V_{grande} - V_{pequeña}\right| = 1\cdot 5 = 5\,kV = 5000\,V$

Por tanto, debe cumplirse que $Q = \dfrac{5000}{27\cdot 10^{10}} = 0{,}02\ \mu C$

2.7 * Un plano conductor (superficie *S* y espesor despreciable) está cargado con una carga *Q*:
a) Dí cómo está distribuida la carga en el conductor, y calcula su densidad superficial de carga.
b) Un segundo plano conductor igual que el anterior, pero descargado, se sitúa muy próximo y paralelo al primero, por lo que podemos asumir influencia total entre ambos. Explica cómo se distribuyen las cargas en ambos conductores, y calcula sus respectivas densidades superficiales de carga.

Solución:

a) La cargo Q se distribuye sobre las dos superficies del conductor. Entonces $\sigma = \dfrac{Q}{2S}$
b) Si hay influencia total entre ambos planos, la carga en aquella superficie que enfrente al primer plano será –Q/2, por lo que la carga en la otra superficie será +Q/2. De este modo, la carga neta del segundo conductor será nula, y el campo eléctrico en ambos conductores es cero.

2.8 Un condensador (capacidad *C*) está conectado a una fuente de alimentación (d.d.p. V entre sus bornes). Se desconecta de la fuente y se conecta a un segundo condensador de capacidad *2C*, inicialmente descargado.
a) Calcula la carga y el potencial de cada condensador después de conectarlos.
b) las places del segundo condensador se acercan hasta una distancia igual a la mitad de la distancia inicial. Calcula la carga y la diferencia de potencial entre placas de cada condensador.

Solución:

a) La carga tomada por el primer condensador es $Q = CV$. Después de conectar el segundo condensador, esta carga se distribuye entre ambos condensadores, cuyas cargas serán entonces Q_1 y Q_2. Por otro lado, la diferencia de potencial entre las placas de ambos condensadores será la misma. Estas relaciones se pueden escribir como:

$$Q_1 + Q_2 = Q \qquad \text{Y} \qquad V' = \frac{Q_1}{C} = \frac{Q_2}{2C}$$

La solución de este sistema es: $Q_1 = \frac{Q}{3} = \frac{CV}{3}$ $\qquad Q_2 = \frac{2Q}{3} = \frac{2CV}{3}$ $\qquad V' = \frac{1}{3}V$

b) Ahora, la capacidad del segundo condensador es el doble de la inicial, 4C. Podríamos solucionar este caso de la misma manera que el anterior, pero ahora utilizaremos la capacidad equivalente del conjunto: $C_{eq} = C + 4C = 5C$

La carga del condensador equivalente será igual a la carga inicial $Q = CV$ y entonces:

$$V'' = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{CV}{5C} = \frac{V}{5} \qquad Q'_1 = CV'' = \frac{1}{5}CV \qquad Q'_2 = 4CV'' = \frac{4}{5}CV$$

2.9 Repite el ejercicio anterior, pero manteniendo siempre la fuente de alimentación conectada.

Solución:

En este caso, la diferencia de potencial entre las placas de ambos condensadores será V en cualquier instante, así que

a) $Q_1 = CV$ $\qquad Q_2 = 2CV$ $\qquad V' = V$

b) $Q'_1 = CV$ $\qquad Q'_2 = 4CV$ $\qquad V'' = V$

2.10 Dos condensadores (capacidades *2* y 3 μF) están conectados en serie a una fuente de alimentación de *10 V*. Calcular la carga y la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador:
a) Sin utilizar la idea de capacidad equivalente del conjunto de condensadores.
b) Utilizando la idea de capacidad equivalente del conjunto de condensadores.

Solución:

a) Como están conectados en serie, las cargas de ambos condensadores serán iguales ($Q_1 = Q_2$). Además, la suma de las diferencias de potencial entre las placas de ambos condensadores será de 10 V:

$$\frac{Q_1}{2 \cdot 10^{-6}} + \frac{Q_2}{3 \cdot 10^{-6}} = 10 \qquad Q_1 = Q_2$$

Resolviendo este sistema: $\quad Q_1 = Q_2 = 12\ \mu C$

Y las diferencias de potencial: $\quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{12}{2} = 6\,V \qquad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{12}{3} = 4\,V$

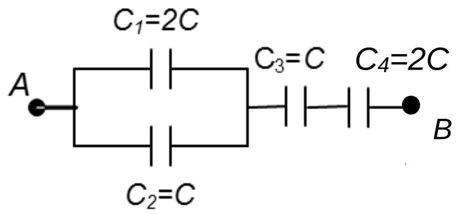
b) La capacidad equivalente de ambos condensadores es

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow C_{eq} = \frac{6}{5}\ \mu F$$

Como ambos tienen la misma carga: $Q_1 = Q_2 = C_{eq} \cdot 10 = \frac{6}{5} \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 12 \mu C$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{12}{2} = 6\,V \qquad\qquad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{12}{3} = 4\,V$$

2.11 Dos condensadores (C_1=2C y C_2=C) están conectados en paralelo. Este conjunto está conectado a otros dos condensadores (C_3=C y C_4=2C) en serie, como se ve en la figura. Se aplica un voltaje de 10 V entre los puntos A y B. Calcular la carga y el voltaje (d.d.p.) en cada condensador, así como la energía almacenada en cada uno y la total del conjunto.



Solución:

Este ejercicio puede ser solucionado de dos maneras diferentes: sin considerar la capacidad equivalente del conjunto, y considerándola. Lo resolveremos de las dos maneras:

a) Sin considerar la capacidad equivalente:

Como C_1 y C_2 están conectados en paralelo, $V_1 = \frac{Q_1}{2C} = V_2 = \frac{Q_2}{C} \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_1}{2}$ (1)

Como C_3 y C_4 están conectados en serie, $Q_3 = Q_4$ (2)

Como el conjunto de C_1 y C_2 está conectado en serie con C_3 y C_4, $Q_1 + Q_2 = Q_3 = Q_4$ (3)

Y la diferencia de potencial entre A y B: $V_1 + V_3 + V_4 = \frac{Q_1}{2C} + \frac{Q_3}{C} + \frac{Q_4}{2C} = 10$ (4)

Tenemos ahora un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4.

De las ecuaciones (1) y (3): $Q_1 + \frac{Q_1}{2} = Q_3 \Rightarrow Q_3 = \frac{3Q_1}{2}$

Y de la ecuación (4):

$$Q_1 + 2Q_3 + Q_4 = 20C \Rightarrow Q_1 + 2\frac{3Q_1}{2} + \frac{3Q_1}{2} = 20C \Rightarrow \frac{11}{2}Q_1 = 20C \Rightarrow Q_1 = \frac{40}{11}C$$

Por tanto: $Q_2 = \frac{20}{11}C$ $\qquad Q_3 = Q_4 = \frac{60}{11}C$

Y $\quad V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{2C} = \frac{20}{11}V \qquad V_3 = \frac{Q_3}{C} = \frac{60}{11}V \qquad V_4 = \frac{Q_4}{2C} = \frac{30}{11}V$

Evidentemente, se cumple que: $V_1 + V_3 + V_4 = \frac{20}{11} + \frac{60}{11} + \frac{30}{11} = \frac{110}{11} = 10\,V$

Con respecto a la energía almacenada:

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2(2C)} = \frac{1}{4}\frac{1600}{121}C = \frac{400}{121}C \qquad W_2 = \frac{Q_2^2}{2C} = \frac{200}{121}C \qquad W_3 = \frac{Q_3^2}{2C} = \frac{1800}{121}C$$

$W_4 = \frac{Q_4^2}{2(2C)} = \frac{900}{121}C$ Energía total almacenada: $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{3300}{121} = \frac{300}{11}C$

b) Considerando la capacidad equivalente:
La capacidad equivalente de los condensadores 1 y 2 (paralelo) es: $C_{12} = C_1 + C_2 = 3C$

La capacidad equivalente del conjunto completo de condensadores es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{11}{6C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{6}{11}C$$

Como $Q_3 = Q_4$ y de la capacidad equivalente: $Q_4 = Q_3 = C_{eq} \cdot 10 = \frac{6}{11}C \cdot 10 = \frac{60}{11}C$

El voltaje en los condensadores 3 y 4 es: $V_3 = \frac{Q_3}{C} = \frac{60}{11}V \quad V_4 = \frac{Q_4}{2C} = \frac{30}{11}V$

El voltaje en los condensadores 1 y 2 es: $V_1 = V_2 = 10 - (\frac{60}{11} + \frac{30}{11}) = \frac{20}{11}V$

Y las cargas: $Q_1 = 2C \cdot \frac{20}{11} = \frac{40}{11}C$ y $Q_2 = C \cdot \frac{20}{11} = \frac{20}{11}C$

La energía total almacenada es: $W = \frac{Q_4^2}{2C_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{3600 \cdot C^2 \cdot 11}{121 \cdot 6C} = \frac{300}{11}C$

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2(2C)} = \frac{400}{121}C \qquad W_2 = \frac{Q_2^2}{2C} = \frac{200}{121}C \qquad W_3 = \frac{Q_3^2}{2C} = \frac{1800}{121}C \qquad W_4 = \frac{Q_4^2}{2(2C)} = \frac{900}{121}C$$

2.12 * El área de las placas de un condensador plano es S=50 cm^2, siendo d=2 mm la distancia entre ellas. El condensador está cargado con una carga Q=22 nC.

a) Encuentra la capacidad del condensador, su densidad superficial de carga, el campo eléctrico entre las placas, la diferencia de potencial entre ellas, y la energía almacenada.

b) Una vez el condensador está cargado, se desconecta de la fuente de alimentación. ¿Qué ocurre con la energía almacenada si las placas del condensador se aproximan o se alejan la una de la otra? ¿Qué ocurre con la energía si la fuente de alimentación permanece conectada?

Solución:

a) $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 22,1 \cdot 10^{-12}\ F = 22,1\ pF$

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{22\cdot 10^{-9}}{50\cdot 10^{-4}} = 4,4\cdot 10^{-6}\ C/m^2 \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{4,4\cdot 10^{-6}}{8,85\cdot 10^{-12}} = 0,5\cdot 10^{6}\ V/m$$

$$V = Ed = 0,5\cdot 10^{6}\cdot 2\cdot 10^{-3} = 1000\,V$$

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}22,1\cdot 10^{-12}\cdot 10^{6} = 11,05\cdot 10^{-6}\ J$$

b) Si las placas se aproximan (d disminuye), entonces la capacidad del condensador ($\frac{\varepsilon_0 S}{d}$) aumenta. Si el condensador se desconecta de la fuente, su carga permanece constante, y la energía almacenada ($W = \frac{Q^2}{2C}$) disminuye. Evidentemente, la fuerza entre las placas del condensador es atractiva, porque ambas tienen cargas con signos diferentes, y por tanto el trabajo necesario para aproximar las placas lo hacen las fuerzas del campo eléctrico. Por ese motivo, la energía almacenada disminuye.
Si las placas se alejan, repitiendo el razonamiento anterior, la energía almacenada aumenta. Ahora, el trabajo tiene que ser hecho por fuerzas externas, en contra de las fuerzas atractivas. El trabajo hecho por estas fuerzas se almacena en el condensador.

Si el condensador permanece conectado a la fuente de alimentación, el voltaje permanece siempre constante. La energía almacenada ($W = \frac{1}{2}CV^2$) aumenta cuando las placas se acercan, y disminuye cuándo las placas se alejan. Es importante notar que ahora, como la fuente está conectado al condensador, esta fuente puede tomar o suministrar energía al condensador.

2.13 Un condensador con capacidad C_0 está conectado a una fuente alimentación que da una diferencia de potencial *V*. Se inserta un dieléctrico con permitividad dieléctrica relativa ε_r entre las placas del condensador. Calcular la carga y la diferencia de potencial del condensador después de insertar el dieléctrico. Al insertar el dieléctrico, la energía almacenada en el condensador, ¿aumenta o disminuye?

Solución:
Después de insertar el dieléctrico, la nueva capacidad es $C' = \varepsilon_r C_0$, mayor que C_0.

Como la fuente de alimentación no se desconecta, la diferencia de potencial en el condensador es constante. En cualquier instante $V' = V$ y $Q' = C'V' = \varepsilon_r C_0 V$

La energía almacenada antes (W) y después (W') de insertar el dieléctrico es:

$$W = \frac{1}{2}C_0V^2 \qquad W' = \frac{1}{2}C'V'^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0 V^2 \quad > W$$ La energía almacenada aumenta

2.14 * Un condensador de capacidad C_0 está conectado a una fuente de alimentación que da una diferencia de potencial *V*; el condensador se desconecta de la fuente, y se inserta un dieléctrico de permitividad dieléctrica relativa ε_r entre las placas del condensador. Calcular la carga y la diferencia de potencial del condensador después de insertar el dieléctrico. ¿Ha aumentado o disminuido la energía almacenada en el condensador al insertar el dieléctrico?

Solución:

Ahora, como el condensador se desconecta después de cargarlo, su carga será constante:

$$Q' = Q = C_0 V \qquad V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{C_0 V}{\varepsilon_r C_0} = \frac{V}{\varepsilon_r}$$

La energía almacenada antes y después de insertar el dieléctrico es:

$$W = \frac{1}{2} C_0 V^2 \qquad W' = \frac{1}{2} C' V'^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 \frac{V^2}{\varepsilon_r^2} = \frac{C_0 V^2}{2\varepsilon_r} \quad < W$$

La energía almacenada disminuye porque el campo eléctrico entre las placas del condensador absorbe el dieléctrico debido a su densidad aparente de carga. El trabajo hecho por el campo eléctrico es igual a la disminución de la energía almacenada.

2.15 ** Un condensador de capacidad C_0 se rellena con un dieléctrico de permitividad dieléctrica relativa *3*. Calcula la nueva capacidad del condensador

a) Si se rellena sólo la mitad izquierda del espacio entre placas.

b) Si se rellena sólo la mitad más baja del espacio entre placas.

Solución:

a) La capacidad inicial es $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

Si sólo se rellena la mitad izquierda del espacio, el nuevo condensador puede ser considerado como dos condensadores en serie. Uno relleno de dieléctrico con capacidad

$$C_1 = \frac{3\varepsilon_0 S}{\frac{d}{2}} = \frac{6\varepsilon_0 S}{d} = 6C_0$$

Y otro sin dieléctrico con capacidad $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\frac{d}{2}} = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{d} = 2C_0$

Entonces el condensador equivalente es $\dfrac{1}{C'} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{6C_0} + \dfrac{1}{2C_0} = \dfrac{4}{6C_0} \Rightarrow C' = \dfrac{3}{2} C_0$

b) Si sólo se rellana la mitad más baja del espacio entre placas, el nuevo condensador puede ser considerado como dos condensadores en paralelo.

El relleno, con capacidad $C_1 = \dfrac{3\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{d} = \dfrac{3\varepsilon_0 S}{2d} = \dfrac{3}{2} C_0$

Y el sin dieléctrico, con capacidad $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{d} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d} = \dfrac{1}{2} C_0$

Y el condensador equivalente es $C'' = C_1 + C_2 = \dfrac{3}{2} C_0 + \dfrac{1}{2} C_0 = 2C_0$

Lección 3: Corriente Eléctrica

3.1 * Un anillo de radio *R* tiene una densidad lineal de carga λ. Si el anillo gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje, calcula la intensidad de corriente que se crea.

Solución:

Consideremos una sección transversal del anillo. A lo largo de un tiempo infinitesimal *dt*, la sección considerada ha girado un ángulo $d\varphi$, por lo que la velocidad angular del anillo es $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

A lo largo de dt, la sección considerada ha cubierto una distancia $Rd\varphi$, siendo la carga en este trozo de anillo $dq=\lambda Rd\varphi$. Como esta carga ha empleado un tiempo *dt* para pasar a través de una sección transversal del anillo, la intensidad de corriente es

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda R d\varphi}{dt} = \lambda R\omega$$

3.2 A lo largo de un conductor de Cu con un radio de 1 *,3 mm* y una longitud de *1 m*, circula una corriente de *20 A*. Calcula la densidad de corriente J, la velocidad de arrastre V_d, y el tiempo empleado por los electrones para cubrir una distancia de *1 m*. Datos: n=$1,806\cdot10^{29}$ e^-/m^3, $q = 1,6\cdot10^{-19}$ *C*.

Solución:

El área de la sección transversal del conductor es $S = \pi R^2 = \pi(1,3\cdot10^{-3})^2 = 5,3\cdot10^{-6}\ m^2$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{20}{5,3\cdot10^{-6}} = 3,8\cdot10^{6}\ A/m^2$$

$$v_d = \frac{J}{nq} = \frac{3,8\cdot10^{6}}{1,806\cdot10^{29}1,6\cdot10^{-19}} = 0,13\cdot10^{-3}\ m/s$$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{1}{0,13\cdot10^{-3}} = 7,6\cdot10^{3}\ s$$

3.3 A lo largo de un conductor de Cu con un radio de 1 *,3 mm* y una longitud de *1 m*, circula una corriente de *20 A*. Si la resistividad del Cu es $\rho_{Cu}=1,7*10^{-8}\ \Omega m$, calcula el campo eléctrico E dentro del conductor, su resistencia R, y la d.d.p. entre sus extremos.

Solución:

$$E = \frac{J}{\sigma} = J\rho = 3,8\cdot10^{6}\cdot1,7\cdot10^{-8} = 64,6\cdot10^{-3}\ V/m$$

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{1,7\cdot10^{-8}\cdot1}{5,3\cdot10^{-6}} = 3,2\cdot10^{-3}\ \Omega$$

$$V = IR = 20\cdot3,2\cdot10^{-3} = 64\cdot10^{-3}\ V$$

3.4 Dos resistencias de *3* y 5 Ω están conectadas en paralelo; a lo largo del conjunto circula una intensidad de corriente total de I = *10 A*. Calcula qué corriente circula por cada una de las resistencias.

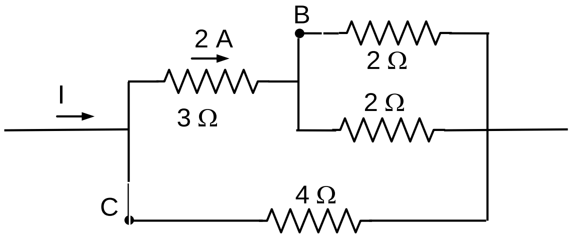
Solución:

Si I_3 e I_5 son las intensidades que circulan por cada una de las resistencias, se debe cumplir que:

$$I_3 + I_5 = 10 \qquad \text{y} \qquad 3I_3 = 5I_5$$

La solución de este sistema es: $I_3 = \frac{25}{4}\,A$ $\qquad I_5 = \frac{15}{4}\,A$

3.5 Dado el conjunto de resistencias de la figura, encontrar a) la intensidad total I. b) si el conjunto de resistencias está aislado de cualquier circuito externo, calcular su resistencia equivalente entre los puntos B y C.



Solución:

a) La resistencia equivalente de las dos resistencias de 2 Ω es 1 Ω. Entonces, la diferencia de potencial entre los extremos del conjunto de resistencias es $V = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8\,V$

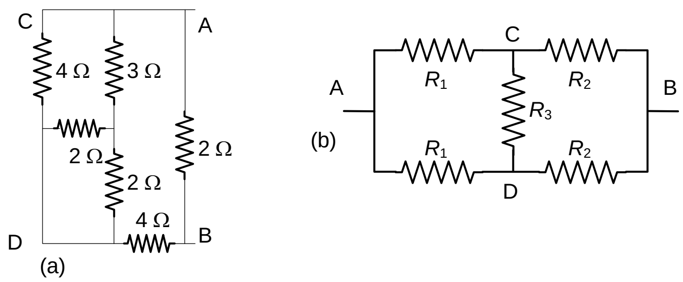
La intensidad que circula por la resistencia de 4 Ω es $I_4 = \frac{8}{4} = 2\,A$

Y la intensidad total: $I = 2 + 2 = 4\,A$

b) Si no hay ningún circuito externo, y miramos el circuito entre los puntos B y C, el conjunto de dos resistencias de 2 Ω en paralelo está conectado en serie con la resistencia de 4 Ω. Esta asociación (5 Ω) está conectada en paralelo con la resistencia de 3 Ω. Por tanto:

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3+5}{15} \Rightarrow R_{BC} = \frac{15}{8}\,\Omega$$

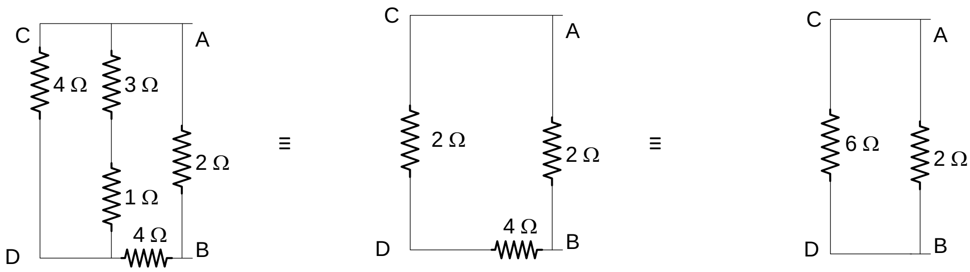
3.6 * Para los dos circuitos de la figura, calcular la resistencia equivalente entre los terminales A y B (R_{AB}), y entre los terminales C y D, (R_{CD}).



Solución:

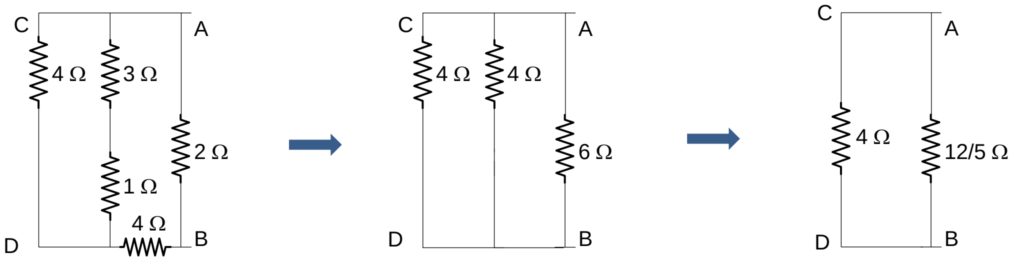
a) Entre A y B:

Dos resistencias de 2 Ω están conectados en paralelo, siendo 1 Ω su resistencia equivalente. Esta resistencia equivalente está conectada en serie con la resistencia de 3 Ω, siendo el circuito resultante:



Entonces $\dfrac{1}{R_{AB}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow R_{AB} = \dfrac{3}{2}\,\Omega$

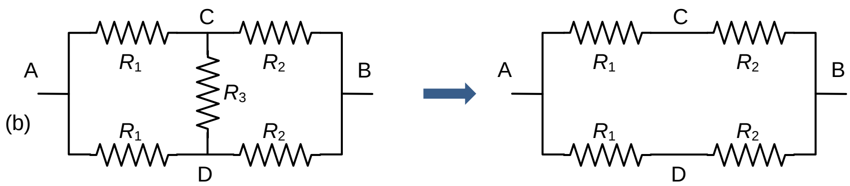
Entre C y D:



Entonces $\dfrac{1}{R_{CD}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{8}{12} \Rightarrow R_{CD} = \dfrac{3}{2}\,\Omega$

Aunque R_{AB} y R_{CD} son iguales, la resistencia equivalente de un conjunto de resistencias entre puntos diferentes de un circuito, normalmente conduce a valores diferentes. El hecho de que $R_{AB}=R_{CD}$ en este ejemplo, es sólo una coincidencia.

b) Entre A y B:
En este caso, las resistencias no están asociadas ni en serie ni en paralelo. Pero si miramos el circuito, podemos ver que la parte superior del circuito es igual que la parte inferior, por lo que las intensidades que circularán a lo largo de la rama superior y la inferior serán iguales. Por esta razón, el potencial eléctrico en los puntos C y D es el mismo, y no circulará ninguna intensidad a lo largo de la resistencia R_3. Como consecuencia, R_3 puede ser eliminada del circuito, y R_1 y R_2 están conectadas en serie, tanto en la rama superior como en la inferior.



Luego: $\dfrac{1}{R_{AB}} = \dfrac{1}{R_1+R_2} + \dfrac{1}{R_1+R_2} = \dfrac{2}{R_1+R_2} \Rightarrow R_{AB} = \dfrac{R_1+R_2}{2}$

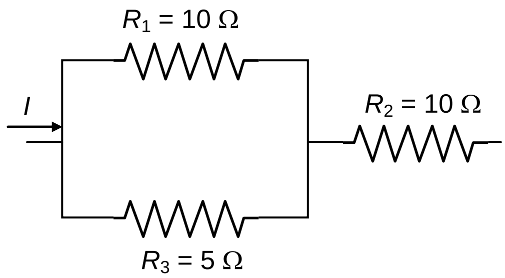
Entre C y D:

En este caso, las dos resistencias R_1 están conectadas en serie, y también las dos R_2. Y todo ello conectado en paralelo con R_3. Por tanto:

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{R_1+R_1} + \frac{1}{R_2+R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{CD} = \frac{1}{\dfrac{1}{2R_1} + \dfrac{1}{2R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$$

Lección 4: Energía y potencia

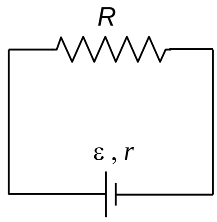
4.1 En el circuito de la figura, justifica:
a) ¿Qué resistencia disipa mayor potencia por efecto Joule?
b) ¿Qué resistencia disipa menor potencia por efecto Joule?



Solución:

a) La potencia disipada en una resistencia es $P = I^2 R$. La intensidad total se divide entre R_1 y R_3 pero la intensidad total atraviesa R_2. Entonces R_1 y R_2 son las resistencias más grandes, y R_2 está recorrida por la intensidad más alta. Por tanto, R_2 disipa más potencia que las otras resistencias.
b) La resistencia que disipa menos potencia tendría que ser R_1 o R_3. La potencia disipada en una resistencia es $P = \frac{V^2}{R}$. Como V es igual para ambas resistencias, R_1 disipa menos potencia.

4.2 En el circuito de la figura, *ε=6 V* y r*=0,5 Ω.*. La potencia perdida por efecto Joule en r es *8 W*. Calcula:
a) La intensidad que recorre el circuito.
b) La diferencia de potencial entre los terminales de R.
c) *R*.
d) La potencia generada, la potencia suministrada, y el rendimiento del generador.
e) Verifica que la potencia suministrada por el generador es igual a la potencia perdida por efecto Joule en R.



Solución:

a) $8 = I^2 \cdot 0{,}5 \Rightarrow I = 4\ A$
b) $V_R = \varepsilon - Ir = 6 - 4 \cdot 0{,}5 = 4\,V$
c) $V_R = IR \Rightarrow 4 = 4 \cdot R \Rightarrow R = 1\Omega$
d) $P_g = \varepsilon I = 6 \cdot 4 = 24\ w \quad P_s = P_g - I^2 r = 24 - 4^2 \cdot 0{,}5 = 16\ w$

$$\eta_g = \frac{P_s}{P_g} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} = 0{,}66 \Rightarrow \eta_g = 66\ \%$$

e) $P_R = I^2 R = 16 \cdot 1 = 16\ w$

4.3 * Una resistencia *R* está conectada a un generador de fuerza electromotriz ε y resistencia interna *r*. ¿Cuál tendría que ser el valor de R para que la potencia disipada en esta resistencia fuera máxima?

Solución:

La corriente que circula a lo largo de este circuito es $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$

La potencia perdida en R es $P_R = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(R + r)^2} R$

El máximo de P_R se puede calcular igualando su derivado a cero:

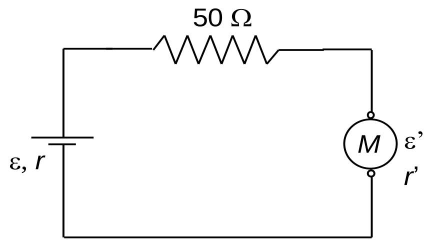
$$\frac{dP_R}{dR}=\frac{-\varepsilon^2 2(R+r)}{(R+r)^4}R+\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}=\frac{-\varepsilon^2 2(R+r)R}{(R+r)^4}+\frac{\varepsilon^2 (R+r)^2}{(R+r)^4}=0\Rightarrow 2R=R+r\Rightarrow R=r$$

4.4 El motor del circuito consume *50 W*, siendo *un 20%* por efecto Joule. Si el generador suministra *100 W* al circuito, calcula:

a) La potencia consumida en la resistencia de 50 Ω.

b) Si el generador genera una potencia de 110 W, calcula sus parámetros característicos, ε y r.

c) Los parámetros característicos del motor, ε' y r'.



Solución:

a) $P_{50}=P_s-P_c=100-50=50\ w$

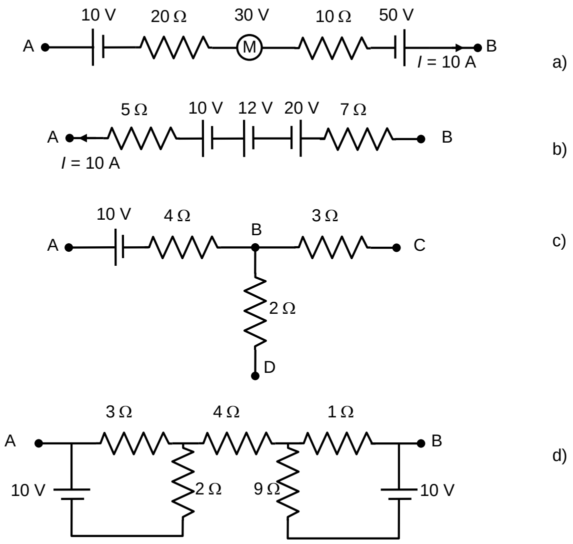
b) $P_{50}=50=I^2 50\Rightarrow I=1\ A$

$110=\varepsilon\cdot 1\Rightarrow\varepsilon=110\ V\quad P_r=110-100=10=I^2 r=r\Rightarrow r=10\ \Omega$

c) $P_{r'}=\dfrac{20\cdot 50}{100}=10=I^2 r'=1\cdot r'\Rightarrow r'=10\ \Omega$

$P_t=\dfrac{80\cdot 50}{100}=40=\varepsilon' I=\varepsilon'\cdot 1\Rightarrow\varepsilon'=40\ V$

4.5 Calcula la diferencia de potencial entre los puntos A y B de los circuitos siguientes:



Solución:

a) $V_A-V_B=10(20+10)-(-10-30+50)=300-10=290\ V$

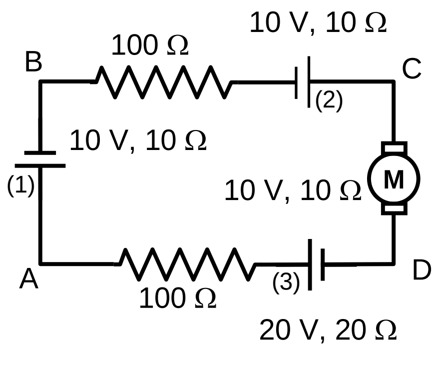
b) $V_A-V_B=-10(5+7)-(-10-12+20)=-120+2=-118\ V$

c) $V_A-V_B=0\cdot 4-(-10)=10\ V$

d) $V_A-V_B=3\cdot\dfrac{10}{5}-1\cdot\dfrac{10}{10}=6-1=5\ V$

4.6 Dado el circuito de la figura:

a) Calcula el valor y dirección de la intensidad que recorre el circuito.



b) Calcula la diferencia de potencial entre los puntos A y C (V_A-V_C), tanto a lo largo del camino *ABC* como a lo largo de *ADC*.

c) ¿Qué dispositivos suministran energía al circuito? Calcula la potencia suministrada por cada elemento.

d) ¿Qué dispositivos consumen energía del circuito? Calcula la potencia consumida por cada elemento.

e) ¿Cuáles son los rendimientos del motor y de la fuente de alimentación (2)?

f) Si modificamos la fuerza electromotriz de la fuente de alimentación (1), ¿cuál debería ser su valor para que la diferencia de potencial entre los puntos A y C fuera cero? ¿Cuál es la intensidad que recorre el circuito en este caso?

Solución:

a) Si suponemos que la intensidad circula en el sentido de las agujas del reloj:

$$I=\frac{20-10+10-10}{20+100+10+100+10+10}=\frac{10}{250}=0{,}04\ A$$

b)
$$(V_A-V_c)_{ABC}=0{,}04(10+100+10)-(-10+10)=4{,}8\,V$$
$$(V_A-V_c)_{ADC}=-0{,}04(100+20+10)-(-20+10)=-5{,}2+10=4{,}8\,V$$

c) Los generadores 2 y 3 está suministrando energía al circuito porque la intensidad circula desde el terminal negativo al terminal positivo a través de ellos.

$$P_{S_2}=\varepsilon I-I^2r=10\cdot 0{,}04-0{,}04^2\cdot 10=0{,}384\ w$$
$$P_{S_3}=\varepsilon I-I^2r=20\cdot 0{,}04-0{,}04^2\cdot 20=0{,}768\ w$$

d) El generador 1, el motor y todas las resistencias están consumiendo energía del circuito.

$$P_{c_1}=\varepsilon I+I^2r=10\cdot 0{,}04+0{,}04^2\cdot 10=0{,}416\ w$$
$$P_{c_{engine}}=\varepsilon' I+I^2r'=10\cdot 0{,}04+0{,}04^2\cdot 10=0{,}416\ w$$
$$P_{resistencias}=I^2\sum R_i=0{,}04^2(100+100)=0{,}32\,w$$

Naturalmente, la suministrada tiene que ser igual a la potencia consumida:

$$P_S=0{,}384+0{,}768=1{,}152\ w \qquad\qquad P_C=0{,}416+0{,}416+0{,}32=1{,}152\ w$$

e)
$$\eta_{motor}=\frac{P_t}{P_c}=\frac{\varepsilon' I}{0{,}416}=\frac{0{,}4}{0{,}416}=0{,}96\approx 96\,\%$$

$$\eta_2=\frac{P_{s_2}}{P_{g_2}}=\frac{0{,}384}{\varepsilon I}=\frac{0{,}384}{10\cdot 0{,}04}=0{,}96\approx 96\ \%$$

f) Si la diferencia de potencial entre A y C tiene que ser cero, entonces la intensidad de corriente que recorre el circuito (supuesta con la misma dirección) es:

$$(V_A-V_c)_{ADC}=-I(100+20+10)-(-20+10)=0\Rightarrow I=\frac{10}{130}\ A$$

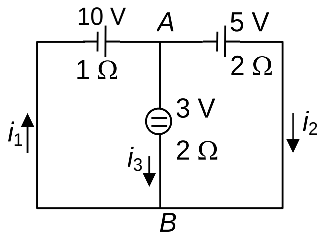
Si hubiéramos supuesto la dirección opuesta para I, habríamos obtenido una intensidad negativa.

Si suponemos ahora que la polaridad del generador 1 es la misma con la nueva fuerza electromotriz, su valor debe ser:

$$(V_A - V_c)_{ABC} = \frac{10}{130}(10 + 100 + 10) - (-\varepsilon_1 + 10) = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0{,}77\ V$$

Si hubiéramos supuesto polaridad opuesta para el generador 1, la nueva fuerza electromotriz resultaría negativa.

Lección 5: Redes



5.1 En el circuito de la figura, calcular las intensidades de las tres ramas y la diferencia de potencial entre los terminales del motor.

Solución:

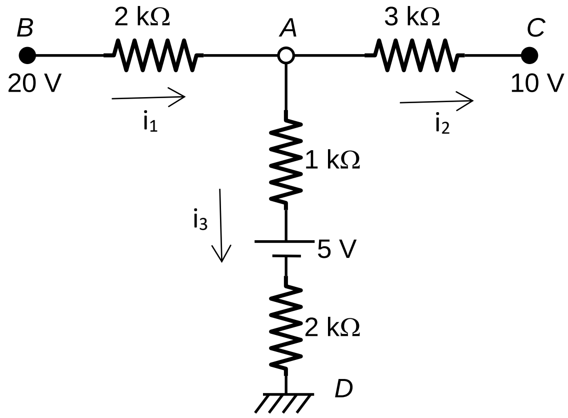
La dirección asignada a I_3 significa que el terminal superior del motor es el terminal positivo, y el terminal más bajo es el negativo. Entonces, escribiendo las leyes de Kirchoff en el nudo A y en las dos mallas:

$$i_1 = i_2 + i_3$$
$$i_1 1 + i_3 2 - (10-3) = 0$$
$$-i_3 2 + i_2 2 - (3+5) = 0$$

La solución de este sistema es: $i_1 = \frac{11}{2}\,A \quad i_2 = \frac{19}{4}\,A \qquad i_3 = \frac{3}{4}\,A$

Como I_3 es positivo, la dirección supuesta y la polaridad del motor son las correctas. Por tanto

$$V_A - V_B = i_3 2 + 3 = \frac{3}{4}2 + 3 = \frac{9}{2}V$$



5.2 Usando las leyes de Kirchoff, calcular el potencial del punto A y las intensidades de corriente a lo largo de las ramas del circuito.

Solución:

Si llamamos i_1 a la intensidad que va de B a A, i_2 a la que va de A a C, e I_3 a la que va de A a D, las ecuaciones de las leyes de Kirchoff quedan:

$$i_1 = i_2 + i_3$$
$$i_1 2 + i_3 3 - (-5) = 20$$
$$-i_2 3 + i_3 3 - (-5) = 10$$

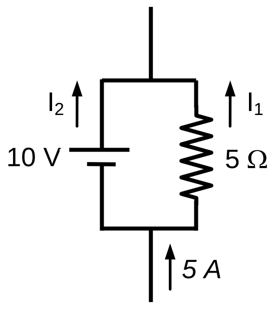
La solución de este sistema es: $i_1 = \frac{75}{21}\,mA \qquad i_2 = \frac{20}{21}\,mA \qquad i_3 = \frac{55}{21}\,mA$

5.3 Por un cable circula una intensidad de corriente de *5 A*. El cable está dividido en dos ramas: una de ellas con un generador ideal de fuerza electromotor *10 V*, y otra rama con una resistencia de *5 Ω*.

a) Calcula la intensidad de corriente que circula por cada rama.

b) Repite los cálculos después de invertir la polaridad de generador.

c) Repite cálculos de los puntos a) y b) sustituyendo el generador ideal por un generador real con resistencia interna *10 Ω*.



Solución:

a) La diferencia de potencial en la resistencia está dada por la batería (10 V) y entonces, siendo i_1 la intensidad que recorre la resistencia de 5 Ω (en el sentido indicado): $5 \cdot i_1 = -10 \Rightarrow i_1 = -2\,A$

Es decir, por la resistencia circulan 2 A hacia abajo. Por tanto, por la batería circulan 7 A hacia arriba.

b) Si se invierte la polaridad de generador: $5 \cdot i_1 = 10 \Rightarrow i_1 = 2\ A$ hacia arriba.

Y a lo largo de la batería circulan 3 A hacia arriba.

c) Si la polaridad del generador es la de la figura, tiene que cumplirse que:

$i_1 + i_2 = 5$ Y $5 \cdot i_1 = 10 \cdot i_2 - 10$

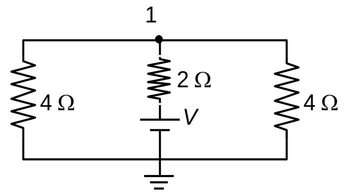
La solución de este sistema es: $i_1 = \frac{8}{3} A$ $i_2 = \frac{7}{3} A$

Si la polaridad de generador es opuesta a la de la figura:

$i_1 + i_2 = 5$ y $5 \cdot i_1 = 10 \cdot i_2 + 10$

La solución del sistema es: $i_1 = 4\ A$ $i_2 = 1\ A$

5.4 En la red de la figura, calcula el valor de *V* para que la tensión en el nudo 1 sea de 50 V.

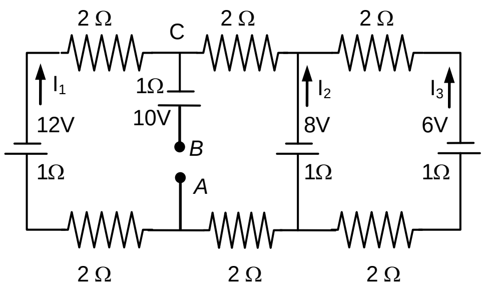


Solución:

Si el potencial en el punto 1 es 50 V, entonces la intensidad que circula a lo largo de cada una de las dos resistencias de 4 Ω es 50/4=12,5 A (de 1 a tierra). Entonces, según la ley de los nudos, por la rama central circulan 25 A de tierra al nudo 1, y tiene que verificarse que:

$$50 = -25 \cdot 2 + V \Rightarrow V = 100\ V$$

5.5 Encuentra la diferencia de potencial entre A y B .



Solución:

Con las intensidades mostradas en la figura:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

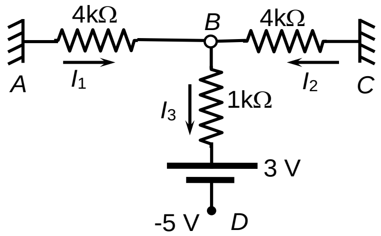
$$i_1 9 - i_2 1 - (-12 + 8) = 0$$

$$i_2 1 - i_3 5 - (-8 + 6) = 0$$

Resolviendo el sistema: $i_1 = -\frac{26}{59} A$ $i_2 = \frac{2}{59} A$ $i_3 = \frac{24}{59} A$

y $V_A - V_B = i_1 5 - (-12 + 10) = -\frac{26}{59} \cdot 5 + 2 = \frac{-12}{59} \approx -0{,}20\ V$

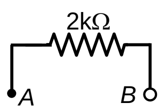
5.6 Dada la red de la fgura:



a) Calcula las intensidades de rama I_1, I_2, e I_3 mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Encuentra el generador equivalente de Thevenin entre *A* y B, indicando claramente su polaridad.

c) En paralelo entre los puntos A y B de la red, se conecta una nueva resistencia de 2 kΩ. Calcular la intensidad que circulará por esta nueva resistencia, indicando claramente su dirección.



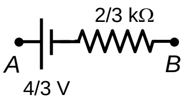
Solución:

a) Con las intensidades mostradas en la figura:

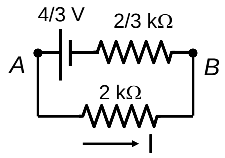
$$I_1 + I_2 = i_3$$
$$4I_1 + I_3 - (-3) = 0 - (-5) = 5$$
$$4I_1 - 4I_2 = 0$$

Cuya solución es: $I_1 = I_2 = \frac{1}{3}\,mA \qquad I_3 = \frac{2}{3}\,mA$

b) $\varepsilon_T = V_{AB} = 4I_1 = \frac{4}{3}\,V \qquad R_{eq} = \frac{2}{3}\,k\Omega$



c) $$I = \frac{\varepsilon_T}{R_{eq} + 2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{1}{2}\,mA$$

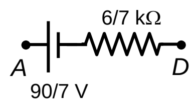


5.7 Calcula el generador equivalente de Thevenin entre los puntos A y D del circuito del ejercicio 5.2. ¿Cuál será la intensidad que circulará por una nueva resistencia de 5 kΩ conectada entre A y D en el circuito original?

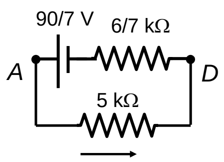
Solución:

Con las intensidades calculadas en el ejercicio 5.2:

$$\varepsilon_T = V_{AD} = 3I_3 + 5 = 3\frac{55}{21} + 5 = \frac{90}{7}\,V \qquad \frac{1}{R_{AD}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \Rightarrow R_{AD} = \frac{6}{7}\,k\Omega$$



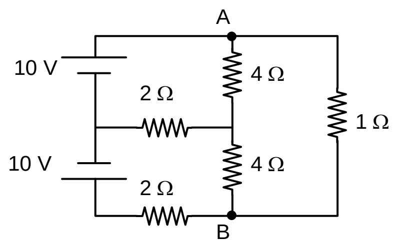
Si se conecta una nueva resistencia de 5 Ω entre A y D, el circuito resultante, teniendo en cuenta el generador equivalente de Thevenin calculado es:



Y la intensidad $$I = \frac{\varepsilon_T}{R_{eq} + 5} = \frac{\frac{90}{7}}{\frac{6}{7} + 5} = \frac{90}{41}\,mA$$

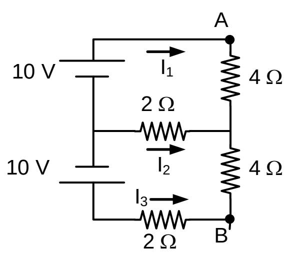
I

5.8.* En la red de la figura, encontrar la intensidad que recorre la resistencia *R*=1 Ω, aplicando el teorema de Thevenin entre *A* y B .



Solución:

Primero eliminamos la resistencia de 1 Ω. El nuevo circuito es:



cuyas ecuaciones de Kirchoff son

$$I_1 + I_2 + i_3 = 0$$
$$4I_1 - 2I_2 - 10 = 0$$
$$2I_2 - 6I_3 - (-10) = 0$$

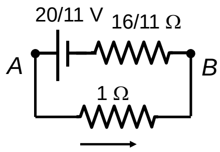
$$I_1 = \frac{15}{11}A \qquad I_2 = -\frac{25}{11}A \qquad I_2 = \frac{10}{11}A$$

$$\varepsilon_T = V_{AB} = 4I_1 - 4I_3 = \frac{20}{11} V$$

La resistencia equivalente entre A y B es:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3}+4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16} \Rightarrow R_{AB} = \frac{16}{11}\,\Omega$$

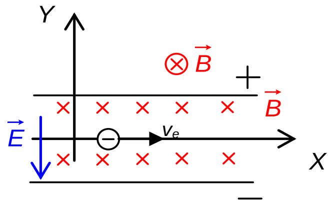
Ahora añadimos la resistencia de 1 Ω que habíamos eliminado entre A y B, y tenemos el circuito original:



Y la intensidad que circula por la resistencia de 1 Ω de A a B es:

$$I = \frac{20/11}{16/11+1} = \frac{20/11}{27/11} = \frac{20}{27} A$$

Lección 6: Fuerzas magnéticas

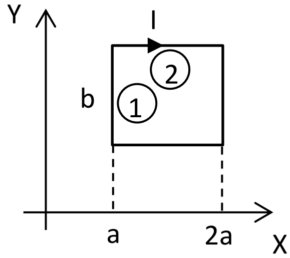


6.1 Se dispara un haz de electrones entre las placas de un condensador, siendo V la diferencia de potencial entre las placas. También existe un campo magnético uniforme perpendicular al campo eléctrico. Si las placas del condensador están separadas una distancia *d*, calcular la velocidad de los electrones que no se desvían de la trayectoria rectilínea cuando se mueven entre las placas.

Solución:

Los electrones que no se desvían son aquellos con una velocidad (v_e) tal que la fuerza eléctrica (hacia arriba) anula la fuerza magnética (hacia abajo): $qE = qv_eB$

Como $E = \dfrac{V}{d}$ entonces: $q\dfrac{V}{d} = qv_eB \Rightarrow v_e = \dfrac{V}{Bd}$



6.2 Consideremos la espira rectangular de la figura, con lados *a* y b , y recorrida por una intensidad *I* en la dirección mostrada. La espira se encuentra dentro de un campo magnético no uniforme $\vec{B} = B_0\dfrac{a}{x}\vec{k}$. Calcular las fuerzas magnéticas que actúan sobre los lados 1 y 2.

Solución:

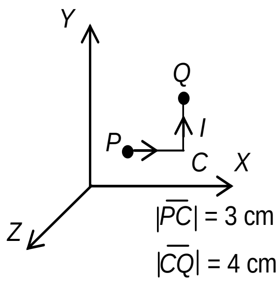
A lo largo del lado 1, el campo magnético es uniforme $\vec{B}_1 = B_0\dfrac{a}{a}\vec{k} = B_0\vec{k}$

Y la fuerza: $\vec{F}_1 = Ib\vec{j} \times B_0\vec{k} = IbB_0\vec{i}$

A lo largo del lado 2, el campo magnético no es uniforme, y entonces tenemos que considerar una longitud infinitesimal de conductor $d\vec{l} = dx\vec{i}$ La fuerza que actúa sobre este trozo infinitesimal de conductor es: $d\vec{F}_2 = Idx\vec{i} \times B_0\dfrac{a}{x}\vec{k} = -IB_0\dfrac{a}{x}dx\vec{j}$

y la fuerza actuante sobre el lado 2 será su integral: $\vec{F}_2 = -\int_a^{2a} IB_0\dfrac{a}{x}dx\vec{j} = -IB_0 a\ln 2\vec{j}$

6.3 Por el segmento del conductor de la figura circula una corriente *I*=2 A de P a Q, y se encuentra dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = 1\vec{k}\,T$. Encontrar la fuerza total que actúa sobre el conductor y demostrar que es la misma que si el conductor fuera un segmento rectilíneo y entre P y Q .



Solución:

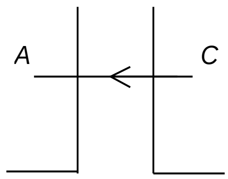
La fuerza total que actúa sobre el conductor es la fuerza que actúa sobre el segmento PC más la fuerza que actúa sobre el segmento CQ:

$$\vec{F} = \vec{F}_{PC} + \vec{F}_{CQ} = 2\cdot 3\cdot 10^{-2}\vec{i} \times \vec{k} + 2\cdot 4\cdot 10^{-2}\vec{j} \times \vec{k} = (-6\vec{j} + 8\vec{i})10^{-2}\ N$$

Si el conductor fuera un segmento rectilíneo entre P y Q, la fuerza sería la misma:

$$\vec{F}_{PQ} = 2(3\cdot 10^{-2}\vec{i} + 4\cdot 10^{-2}\vec{j})\times\vec{k} = (-6\vec{j} + 8\vec{i})10^{-2}\ N$$

6.4 Por el conductor *AC* de la figura circula una corriente de 10 A (es parte de un circuito eléctrico), siendo el conductor capaz de deslizar a lo largo de dos raíles verticales.



Calcular el campo magnético uniforme necesario, perpendicular al plano de la figura, para que la fuerza magnética en el conductor equilibre la fuerza gravitatoria del conductor. ¿Cuál debería ser la dirección del campo magnético?

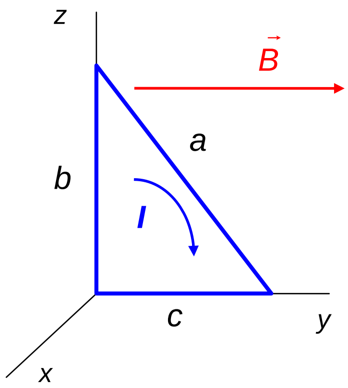
La longitud del conductor es 10 cm, y su masa 20 g.

Solución:

Para que el campo magnético pueda anular la fuerza gravitatoria, debe ir dirigido perpendicular al plano del papel y dirigido hacia el lector. Su valor debe verificar que:

$$ILB = mg \Rightarrow 10\cdot 10\cdot 10^{-2}B = 20\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8 \Rightarrow B = 0{,}196\ T$$

6.5 A lo largo de la espira de la figura, de lados *a*, *b* y c, circula una intensidad *I* en la dirección mostrada. La espira está situada dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{j}$. Encuentra:



a) las fuerzas magnéticas en los lados de la espira.

b) Momento magnético de la espira.

c) El momento mecánico que actúa sobre la espira.

Solución:

a) $\vec{F}_b = Ib\vec{k}\times B\vec{j} = -IbB\vec{i}$ $\vec{F}_c = Ic\vec{j}\times B\vec{j} = 0$

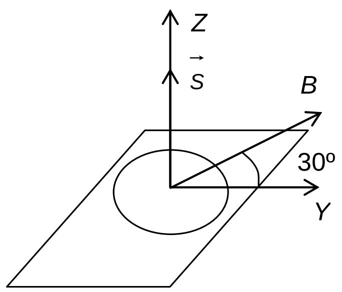
$$\vec{F}_a = I(-b\vec{k} + c\vec{j})\times B\vec{j} = IbB\vec{i}$$

Evidentemente, como el campo magnético es uniforme, la fuerza total es nula.

b) $\vec{m} = I\vec{S} = -\dfrac{Ibc}{2}\vec{i}$

c) $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B} = -\dfrac{Ibc}{2}\vec{i}\times B\vec{j} = -\dfrac{IBbc}{2}\vec{k}$

6.6 Para medir un campo magnético, se utiliza una bobina de 200 espiras y 14 cm^2 de área, que forma un ángulo de 30º con el campo magnético (ver figura). Cuando circula una intensidad de 0,7 A por la bobina, se mide un momento de 980·10^{-6} Nm. Calcula *B*.



Solución:

El momento magnético de la bobina es $\vec{m} = NI\vec{S} = 200\cdot 0{,}7\cdot 14\cdot 10^{-4}\vec{k} = 1{,}96\cdot 10^{-1}\vec{k}\ A\cdot m^2$

Y el módulo del par mecánico:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{m}\times\vec{B}| = mBsen60º = 0{,}196\cdot B\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 980\cdot 10^{-6} \Rightarrow B = 5{,}77\cdot 10^{-3}\ T$$

En forma de vector: $\vec{B} = 5{,}77\cdot 10^{-3}(\cos 3\,0º\vec{j} + sen30º\vec{k}) = (5\vec{j} + 2{,}89\vec{k})10^{-3}\ T$

6.7 ** Una barra conductora de longitud L se mueve con velocidad v en el plano de papel. Perpendicularmente a este plano está actuando un campo magnético uniforme B. En esta situación, una diferencia de potencial aparece entre los extremos de la barra.

a) Podrías explicar por qué aparece esta diferencia de potencial en la barra?

b) Encuentra la fuerza magnética que actúa sobre un electrón de la barra.

c) Si el campo eléctrico que aparece dentro de la barra es uniforme, encontrar su magnitud y la diferencia de potencial entre los extremos de la barra.

Solución:

a) Cuando la barra se mueve dentro del campo magnético, sobre cada electrón de la barra actúa una fuerza magnética dada por $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$. La dirección de esta fuerza empuja a los electrones hacia un extremo de la barra, quedando este extremo cargado negativamente. Por tanto, el otro extremo del conductor, con menos cargas negativas, queda cargado positivamente. La consecuencia es que un campo eléctrico en la dirección de la barra aparece dentro de ella, y por tanto una diferencia de potencial entre sus extremos.

b) La fuerza magnética que actúa sobre un electrón es $F_m = qvB$

c) La fuerza que actúa sobre un electrón debido al campo eléctrico dentro de la barra es $F_e = qE$. Esta fuerza anula la fuerza magnética, de tal manera que

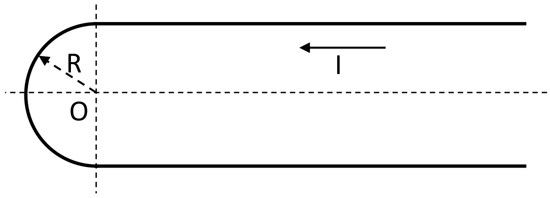
$$qvB = qE \Rightarrow E = vB$$

Si E es uniforme, entonces la diferencia de potencial entre los extremos de la barra es

$$V = Ed = vBL$$

Lección 7: Fuentes de campo Magnético

7.1 Dos conductores semiinfinitos paralelos están unidos por una semicircunferencia, tal y como puede verse en la figura. Por el conjunto de conductores circula una intensidad de corriente I. Calcula en el punto O (centro de la semicircunferencia), siempre dando su dirección:



a) El campo magnético producido por uno de los conductores rectos.
b) El campo magnético producido por la semicircunferencia.
c) El campo magnético total producido por el conjunto de conductores.

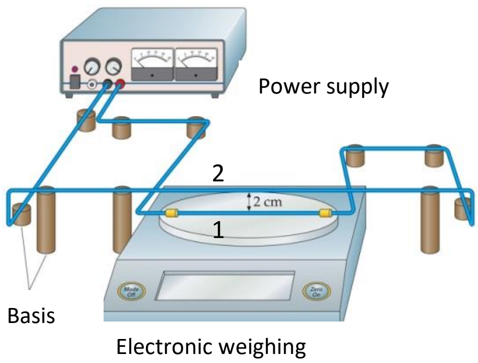
Solución:

a) $B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ Perpendicular al papel y saliendo hacia el lector

b) $B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}$ Perpendicular a papel y saliendo hacia el lector

c) $B = 2\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4R}(\frac{2}{\pi} + 1)$

7.2 Una balanza de corriente es el dispositivo que se muestra en la figura:



Un conductor recto horizontal 10 de cm (1) se encuentra sobre el plato de una balanza, y está conectado a un segundo conductor recto horizontal (2), a una distancia de 2 cm del anterior conductor (el grosor de los conductores puede despreciarse). Ambos conductores están conectados a una fuente de corriente continua, formando un circuito. Cuando la fuente se conecta, la lectura de la balanza aumenta 5.0 mg. (con respecto a la lectura de la balanza con la fuente desconectada).

a) Explicar por qué la lectura de la balanza aumenta cuando se conecta la fuente.
b) Calcular el valor de la intensidad que circula por el circuito cuando se conecta la fuente.
c) Los terminales rojo y negro de la fuente corresponden a los terminales positivo y negativo. ¿Cuál sería la lectura de la balanza si invertimos la polaridad del circuito? (Es decir, si la intensidad circulara en sentido odpuesto).
d) Si la fuente de alimentación se considera como ideal y suministra 12 V al circuito, calcular la potencia perdida por efecto Joule en el conjunto de todas las resistencias del circuito.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (I.S. Unidades)

Solución:

a) Cuando la fuente está conectada, una corriente circula por los conductores 1 y 2 en direcciones opuestas. Por tanto, aparece una fuerza repulsiva entre ellos, y una lectura mayor en la balanza.
b) La fuerza repulsiva que actúa sobre cada conductor es:

$$F = ILB = I10 \cdot 10^{-2}\frac{\mu_0 I}{2\pi 2 \cdot 10^{-2}} = I^2 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6} 9{,}8 \Rightarrow I = \sqrt{49} = 7\ A$$

c) La lectura de la balanza sería la misma, porque si ambas intensidades cambian su dirección, la fuerza entre ellos sigue siendo repulsiva.

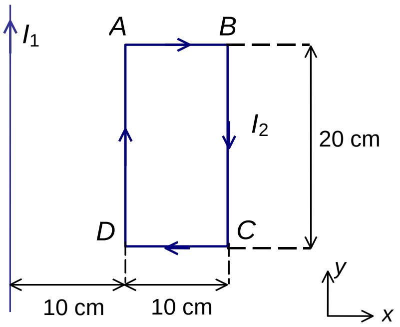
d) La potencia perdida por efecto Joule es $P_J = VI = 12 \cdot 7 = 84\,w$

7.3 Un conductor recto e infinito está recorrido por una intensidad $I_1 = 30\,A$. El rectángulo *ABCD*, cuyos lados *BC* y DA son paralelos al conductor está en el mismo plano que el conductor rectilíneo, y está recorrido por una intensidad $I_2 = 10\,A$. Calcula:

a) El flujo magnético producido por I_1 a través del rectángulo.

b) La fuerza que actúa sobre cada uno de los lados del rectángulo debido al campo magnético creado por I_1.

c) Debería ser nula la fuerza resultante total que actúa sobre los cuatro lados del rectángulo?



Solución:

a) El campo magnético producido por I_1 en un punto de la superficie del rectángulo, situado a una distancia x del conductor es:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k} = -\frac{6 \cdot 10^{-6}}{x}\vec{k}$$

El flujo magnético que atraviesa el rectángulo (saliendo del papel hacia el lector) es:

$$\phi = \int_{10 \cdot 10^{-2}}^{20 \cdot 10^{-2}} \frac{6 \cdot 10^{-6}}{x} 20 \cdot 10^{-2} dx = 12 \cdot 10^{-7} \int_{10 \cdot 10^{-2}}^{20 \cdot 10^{-2}} \frac{dx}{x} = 12 \cdot 10^{-7} \ln 2\, Wb$$

b) $$\vec{F}_{AD} = I_2 \vec{L} \times \vec{B} = 10 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \vec{j} \times \left(-\frac{\mu_0 30}{2\pi 10 \cdot 10^{-2}}\vec{k}\right) = -12 \cdot 10^{-5} \vec{i}\ N$$

$$\vec{F}_{BC} = I_2 \vec{L} \times \vec{B} = 10 \cdot (-20 \cdot 10^{-2} \vec{j}) \times \left(-\frac{\mu_0 30}{2\pi 20 \cdot 10^{-2}}\vec{k}\right) = 6 \cdot 10^{-5} \vec{i}\ N$$

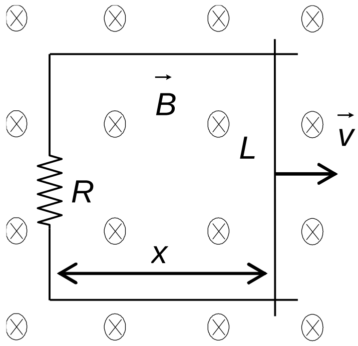
$$\vec{F}_{AB} = \int_{10 \cdot 10^{-2}}^{20 \cdot 10^{-2}} I_2 d\vec{x} \times \vec{B} = 10 \int_{10 \cdot 10^{-2}}^{20 \cdot 10^{-2}} \frac{6 \cdot 10^{-6}}{x} dx\vec{j} = 6 \cdot 10^{-5} \ln 2 \vec{j}\ N$$

$$\vec{F}_{CD} = \int_{10 \cdot 10^{-2}}^{20 \cdot 10^{-2}} I_2 d\vec{x} \times \vec{B} = -10 \int_{10 \cdot 10^{-2}}^{20 \cdot 10^{-2}} \frac{6 \cdot 10^{-6}}{x} dx\vec{j} = -6 \cdot 10^{-5} \ln 2 \vec{j}\ N$$

c) La fuerza resultante total no debería anularse, porque incluso aunque el circuito es un conductor cerrado, el campo magnético que actúa sobre él no es uniforme. Puede demostrarse porque la suma de las fuerzas a lo largo de cada uno de los lados no es nula:

$$\vec{F}_{TOTAL} = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} = -6 \cdot 10^{-5} \vec{i}\ N \neq 0$$

<u>Lección 9: inducción Electromagnética</u>



9.1 Una barra conductora, de resistencia despreciable y longitud *L* desliza sin fricción y con velocidad constante *v* sobre un conductor en forma de *U*. El conductor en forma de U tiene una resistencia *R*, y está colocado dentro de un campo magnética $\vec{B}$ uniforme y perpendicular al conductor. Calcula:

a) El flujo magnético que atraviesa el circuito en función de x.

b) Corriente inducida en el circuito, indicando su dirección.

c) La fuerza que tiene que aplicarse sobre la barra para conseguir que su velocidad *v* sea constante.

d) Verifica que la potencia desarrolla por la fuerza calculada en c) se disipa en la resistencia R en forma de calor por efecto Joule.

Solución:

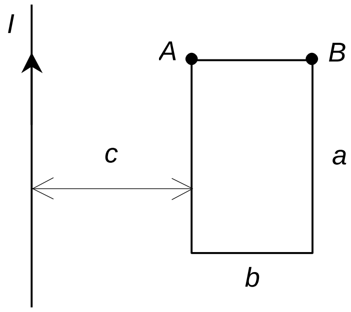
a) Como el campo magnético es uniforme: $\phi = BLx$

b) $\varepsilon = \left|\dfrac{d\phi}{dt}\right| = BL\dfrac{dx}{dt} = BLv \Rightarrow i = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{BLv}{R}$ La dirección es antihoraria

c) $F = iLB = \dfrac{BLv}{R}LB = \dfrac{B^2L^2v}{R}$

d) $P = Fv = \dfrac{B^2L^2v^2}{R}$ $P_{Joule} = i^2R = \dfrac{B^2L^2v^2}{R^2}R = \dfrac{B^2L^2v^2}{R}$

9.2 Por un conductor rectilíneo e indefinido circula una corriente *I* = *Kt* (*K* es una constante positiva). Una espira rectangular de lados a y b se encuentra en el mismo plano que el conductor, como se ve en la figura. Calcula:



a) La fuerza electromotriz f.e.m. inducida en la espira, ε.

b) Si la espira tiene una resistencia *R*, calcular la corriente inducida *i*, indicando su sentido.

c) La fuerza magnética que actúa sobre el lado *AB* en función del tiempo, $F(t)$.

d) Coeficiente de inducción mutua *M,* entre conductor y espira.

Solución:

a) El campo magnético creado por I en un punto situado a una distancia x del conductor es:

$B = \dfrac{\mu_0 kt}{2\pi x}$ Perpendicular al papel, y en puntos situados dentro de la espira, entrando en el papel.

El flujo a través de la espira es: $\phi = \int_c^{c+b} \dfrac{\mu_0 kt}{2\pi x} a\,dx = \dfrac{\mu_0 kta}{2\pi} ln\dfrac{c+b}{c}$

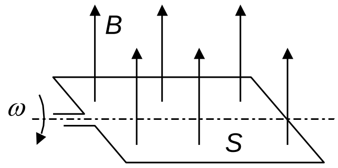
Y la fuerza electromotriz inducida: $\varepsilon = \left|\dfrac{d\phi}{dt}\right| = \dfrac{\mu_0 ka}{2\pi} ln\dfrac{c+b}{c}$

b) $i = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{\mu_0 ka}{2\pi R} ln\dfrac{c+b}{c}$ La dirección es antihoraria

c) $F_{AB}=\int_c^{c+b} i\frac{\mu_0 kt}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 ka}{2\pi R}ln\frac{c+b}{c}\frac{\mu_0 kt}{2\pi}\int_c^{c+b}\frac{dx}{x}=(\frac{\mu_0 k}{2\pi}ln\frac{c+b}{c})^2\frac{at}{R}$ Perpendicular a AB hacia abajo.

d) $M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}ln\frac{c+b}{c}$

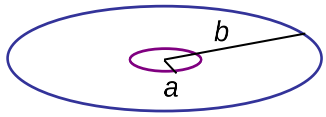
9.3 Calcula el flujo magnético y la f.e.m. inducida en la espira cuadrada de la figura; esta espira tiene un área *S* y está girando con velocidad angular constante ω dentro de un campo magnético *B* uniforme y estacionario.



Solución:

$$\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\omega t \qquad \varepsilon=\left|\frac{d\phi}{dt}\right|=BS\omega sen\,\omega t$$

9.4 * Dos espiras circulares, de radios *a* = 1 cm y b = 50 cm, están colocadas concéntricas en el mismo plano. Si admitimos que *a*<<b (el campo magnético producido por la corriente de la espira de radio b en la espira de radio *a* puede suponerse uniforme) calcula:



a) Coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras.
b) Flujo magnético a través de la espira *b* cuando una intensidad *I* = 5 A circula por la espira a.

Solución:

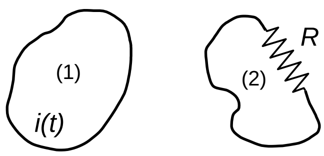
a) Supondremos una intensidad de corriente I circulando por la espira grande. Entonces, el campo magnético producido en los puntos de la espira pequeña puede considerarse uniforme (recuerda que *a*<<b). Por tanto:

$$\phi_a=BS=\frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2 \quad \text{y} \quad M=\frac{\phi_a}{I}=\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}=4\pi^2 10^{-11}\ H$$

Si hubiéramos considerado una intensidad circulando por la espira pequeña, entonces la suposición de que el campo magnético es uniforme en puntos de la espira grande no hubiera sido realista.

b) $\phi_b=MI=\frac{\mu_0\pi a^2 I}{2b}=2\pi^2 10^{-10}\ Wb$

9.5 El coeficiente de inducción mutua entre los dos circuitos de la figura es M. Si una corriente *i*(*t*) = $I_0\cos(\omega t+\phi)$ circula por el circuito 1, ¿cuál es la intensidad que recorre el circuito 2?



Solución:

El flujo a través del circuito 2 es: $\phi_2=Mi(t)=MI_0\cos(\omega t+\phi)$

Y la intensidad que recorre el circuito 2: $i_2(t)=\frac{\varepsilon_2}{R}=\frac{1}{R}\left|\frac{d\phi_2}{dt}\right|=\frac{MI_0\omega}{R}sen(\omega t+\phi)$

9.6 Consideremos dos bobinas coaxiales de la misma longitud ℓ, pero con sección transversal diferente (S_1 y S_2) y diferente número de espiras (n_1 y n_2). La bobina 2 está colocada dentro de 1 ($S_1 > S_2$).

a) Suponiendo que a lo largo de la bobina 1 circula una intensidad de corriente I_1, calcular el flujo magnético a través de la bobina 2, y el coeficiente de inducción mutua entre ambas bobinas.

b) Suponiendo que por la bobina 2 circula una corriente I_2, calcular el flujo magnético a través de la bobina 1, y el coeficiente de inducción mutua entre ambas bobinas.
c) Verifica que los coeficientes de inducción mutua calculados en a) y en b) coinciden.

Solución:

a) $\phi_2 = B_1 S_2 n_2 = \dfrac{\mu_0 I_1 n_1}{\ell} S_2 n_2$ $\qquad M = \dfrac{\phi_2}{I_1} = \dfrac{\mu_0 n_1}{\ell} S_2 n_2$

b) $\phi_1 = B_2 S_2 n_1 = \dfrac{\mu_0 I_2 n_2}{\ell} S_2 n_1$ $\qquad M = \dfrac{\phi_1}{I_2} = \dfrac{\mu_0 n_2}{\ell} S_2 n_1$

c) Ambos coeficientes de inducción mutua coinciden.

9.7 Calcula el coeficiente de autoinducción de una bobina de longitud ℓ, sección transversal *S*, y n vueltas.

Solución:

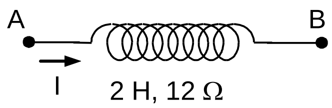
Si suponemos una intensidad de corriente I circulando por la bobina, el campo magnético dentro de ella es:

$$B = \mu_0 I \frac{n}{\ell} \qquad \text{Y el flujo} \qquad \phi = BS = \mu_0 I \frac{n}{\ell} S$$

Entonces, el coeficiente de autoinducción es $L = \dfrac{\phi}{I} = \dfrac{\mu_0 n S}{\ell}$

9.8 Sea una bobina con un coeficiente de autoinducción *L = 2 H* y una resistencia *R = 12 Ω*.

a) Si circula una intensidad de corriente *I=3t* (t es el tiempo) de A a B, calcula la diferencia de potencial V_A-V_B en el instante *t=1 s*.



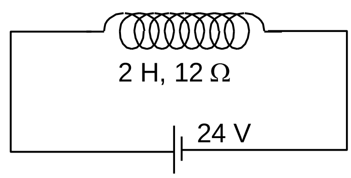
b) Si circula una intensidad de corriente *I=10-3t* (t es el tiempo) de A a B, calcula la diferencia de potencial V_A-V_B en el instante *t=1 s*.

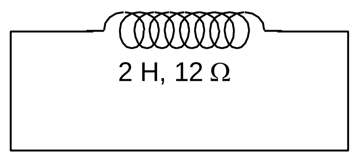
La bobina se conecta a un generador ideal de fuerza electromotriz ε = 24 V (fig.(a)):

c) Cuando se alcanza el estado estacionario, siendo constante la intensidad de corriente, calcular la intensidad de corriente que recorre el circuito.

d) Calcula la energía almacenada en la bobina.

e) Si se cortocircuita la bobina y se elimina el generador (fig. (b)) ¿Cuál es la energía perdida por efecto Joule en la bobina a causa de su resistencia?

a)


b)


Solución:

a) $V_A - V_B = IR + L\dfrac{dI}{dt} = 3t \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 36t + 6$

En t=1 s $(V_A - V_B)_1 = 42\,V$

b) $V_A - V_B = IR + L\dfrac{dI}{dt} = (10 - 3t) \cdot 12 + 2 \cdot (-3) = -36t + 114$

En t=1 s $(V_A - V_B)_1 = 78\,V$

c) $I = \frac{24}{12} = 2\ A$

d) $W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 = 4\ J$

e) $W = 4\ J$

Lección 10: Corriente alterna. Resonancia y filtros.

10.1 Una resistencia de 5 Ω, una autoinducción de 10 mH, y un condensador de 100 μF están conectados en serie. El voltaje en los terminales de la autoinducción es $u_L(t)=50\cos(500t+\frac{\pi}{4})\ \ V$. Calcular la intensidad de corriente que circula por los tres dipolos, el voltaje en terminales de resistencia y condensador, y el voltaje en los terminales del dipolo RLC.

Solución:
La intensidad de corriente (igual para los tres dipolos) puede calcularse a partir del voltaje en los terminales de la autoinducción:

$$X_L=L\omega=10\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{2}=5\,\Omega \qquad I_m=\frac{U_{Lm}}{X_L}=\frac{50}{5}=10\,A$$

El desfase en un autoinducción es π/2 (90º) : $\phi=90º=\phi_u-\phi_i=45-\phi_i\Rightarrow\phi_i=45-90=-45º$

Entonces: $I(t)=10\cos\left(500t-45º\right)A$

En el condensador: $X_C=\frac{1}{C\omega}=\frac{1}{100\cdot10^{-6}\cdot5\cdot10^{2}}=20\,\Omega \qquad U_{Cm}=I_mX_C=10\cdot20=200\,V$

$$\varphi=-90º=\varphi_u-\varphi_i=\varphi_u+45\Rightarrow\varphi_u=-90-45=-135º \qquad u_C(t)=200\cos\left(500t-135º\right)V$$

En la resistencia: $U_{Rm}=I_mR=10\cdot5=50\,V \qquad u_R(t)=50\cos\left(500t-45º\right)V$

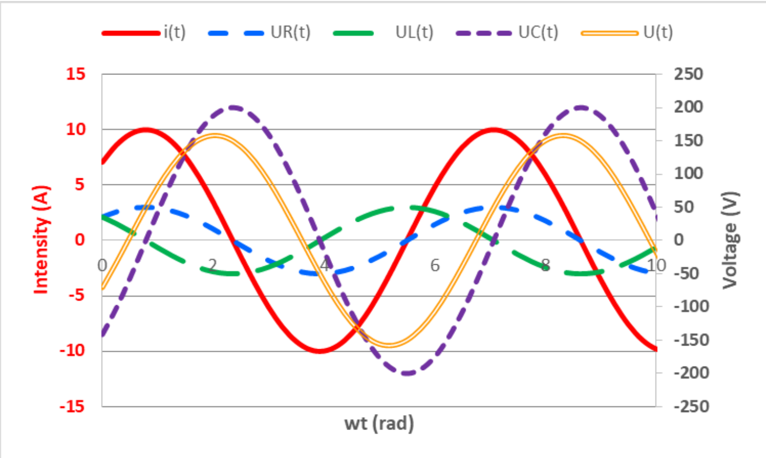
En el dipolo (RLC): $Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}=\sqrt{5^2+(5-20)^2}=15,81\,\Omega$

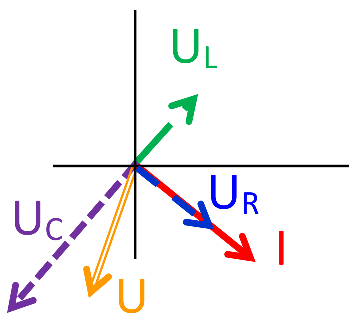
$$U_m=I_mZ=10\cdot15,81=158,1V \quad tg\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{5-20}{5}=-3\Rightarrow\phi=-71,6º$$

$$-71,6º=\phi_u-\phi_i=\phi_u+45\Rightarrow\phi_u=-71,6-45=-116,6º$$

Por tanto: $u(t)=158,1\cos\left(500t-116,6º\right)V$

El dibujo de las intensidades y los voltajes, y el diagrama fasorial son los siguientes:





Será muy interesante comparar estos resultados con los del ejercicio 10.3.

10.2 Un circuito está formado por dos dipolos básicos en serie. Los terminales de este circuito están conectados a un generador de A.C. El generador da un voltaje *u(t)*=150cos(500 *t*+10º) V, y el circuito es recorrido por una intensidad de corriente *i(t)*=13,42cos(500*t*-53,4º) A. Determinar cuales son los dos dipolos básicos del circuito, y sus valores.

Solución:

El desfase del dipolo es: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 10 - (-53,4) = 63,4º$

Como el desfase es positivo y distinto de 90º, significa que los dos dipolos del circuito son una autoinducción y una resistencia.

$$tg63,4º = 2 = \frac{X_L}{R} \Rightarrow X_L = L\omega = 2R$$

$$Z = \frac{150}{13,42} = 11,18 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{11,18}{\sqrt{5}} = 5\ \Omega$$

Y $$L = \frac{2R}{\omega} = \frac{10}{500} = 20\ mH$$

10.3 Representa en una gráfica las ondas de la intensidad de corriente, los voltajes en resistencia, autoinducción, condensador, y el voltaje en los terminales del circuito *RLC* serie formado por una resistencia de 5 Ω, una autoinducción de 10 mH y un condensador de 100 µF. La amplitud de la intensidad es 10 A, la fase inicial de la intensidad puede tomarse como cero, y como pulsación debe utilizarse la correspondiente a la frecuencia de resonancia. Representa también el diagrama fasorial de dicho circuito.

Solución:

La pulsación en resonancia es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{10*10^{-3}*100*10^{-6}}} = 1000\ rad/s \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 159,2\ Hz$$

Con esta pulsación, la amplitud y desfase del voltaje en cada dispositivo es:

Resistencia: $U_{Rm} = I_m R = 10 \cdot 5 = 50\ V \qquad \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i = 0$

Autoinducción: $X_L = L\omega_0 = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 10\,\Omega \qquad U_{Lm} = I_m X_L = 10 \cdot 10 = 100\ V$

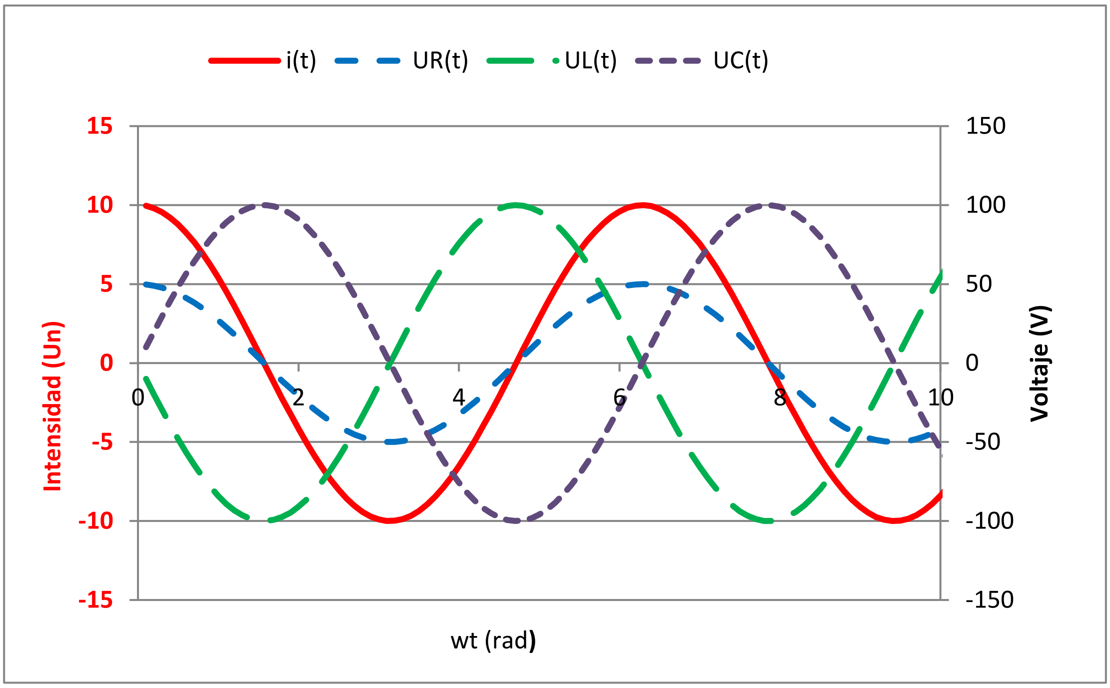
$$\varphi = 90º = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_u = 90 + \varphi_i = 90º$$

Condensador: $X_C = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} = 10\ \Omega \qquad U_{Cm} = I_m X_C = 10 \cdot 10 = 100\ V$

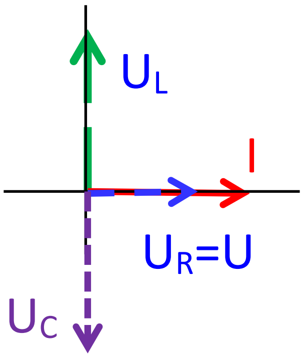
$$\varphi = -90º = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_u = -90 + \varphi_i = -90º$$

Circuito RLC serie: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R = 5\ \Omega \qquad \varphi = 0 = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_u = 0$

Por tanto, dibujando la intensidad y los voltajes:



Y el diagrama fasorial:



Notar que a la frecuencia de resonancia, los voltajes en terminales de autoinducción y condensador son siempre iguales pero con distinto signo (desfase 180º). Por eso, el voltaje en terminales del circuito RLC es siempre igual al voltaje en la resistencia:

$$u_C(t) = -u_L(t) \qquad\qquad u(t) = u_R(t) = 50\cos\left(1000t\right)V$$

Notar también que a la frecuencia de resonancia (ω_0=1000 rad/s) Z=5 Ω, muy pequeño comparado con el valor a 500 rad/s, Z=15,81 Ω. La consecuencia es que, para lograr una corriente máxima de 10 A, tenemos que aplicar un voltaje de amplitud 158,1 V para 500 rad/s, pero una amplitud de solo 50 V a la frecuencia de resonancia.

Además, en los terminales de la autoinducción o del condensador, pueden medirse voltajes incluso más altos que los aplicados al dipolo RLC: al aplicar un voltaje de amplitud 50 V, pueden medirse amplitudes de 100 V en autoinducción y condensador (a la frecuencia de resonancia), o pueden medirse

200 V en el condensador al aplicar 158,1 V a 500 rad/s. Este comportamiento de los dipolos RLC se utiliza para conseguir muy altas diferencias de potencial.

10.4 Un circuito *RLC* serie formado por L=2 H, C=2 μF y R=20 Ω está conectado a un generador de frecuencia ajustable que suministra una amplitud U_m=100 V.

a. Encontrar la frecuencia de resonancia f_0.
b. Encontrar la amplitud de la intensidad a la frecuencia de resonancia.
c. Encontrar las amplitudes de los voltajes en resistencia, autoinducción y condensador, a la frecuencia de resonancia.
d. Encontrar el factor de calidad de circuito.
e. Encontrar el ancho de banda del circuito.

Solución:

a) La frecuencia de resonancia es: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^{-6}}} = 500\, rad/s \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 79{,}6\, Hz$

b) A la frecuencia de resonancia, la impedancia del circuito es igual a la de la resistencia. Por tanto

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{100}{20} = 5\, A$$

c) A la frecuencia de resonancia: $U_{mR} = I_m R = 5\cdot 20 = 100\, V \quad U_{mL} = I_m L\omega = 5\cdot 2\cdot 500 = 5000\, V = U_{mC}$

d) $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{20}\sqrt{\frac{2}{2\cdot 10^{-6}}} = 50$

e) El ancho de banda es el rango de frecuencias con una semiamplitud

$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} = \frac{20}{2\pi\cdot 2} = 1{,}6\, Hz$ alrededor de la frecuencia de resonancia (79,6 Hz).

Es decir, el ancho de banda es el intervalo [78, 81,2] Hz.

Lección 11: Materiales semiconductores

11.1 Encuentra la densidad de electrones y huecos en un cristal de Ge en las situaciones siguientes:

a) Ge puro a 300 K (n_i (300 K) = $2{,}36 \cdot 10^{19}$ m^{-3})

b) A 300 K dopado con Sb (antimonio) con una concentración de $N_D = 4 \cdot 10^{22}$ m^{-3}

c) A 300 K dopado con In (indio) con una concentración de $N_A = 3 \cdot 10^{22}$ m^{-3}

d) Ge puro a 500 K (n_i (500 K) = $2{,}1 \cdot 10^{22}$ m^{-3})

e) A 500 K dopado con Sb con una concentración de $N_D = 3 \cdot 10^{22}$ m^{-3}.

f) A 500 K dopado con In con una concentración de $N_A = 4 \cdot 10^{22}$ m^{-3}

Solución:

a) Como el Ge es puro, $n = p = n_i = 2{,}36 \cdot 10^{19}\ e-h/m^3$

b) Como la concentración de impurezas donadoras es mucho mayor que la concentración intrínseca ($4 \cdot 10^{22}$ >>> $2{,}36 \cdot 10^{19}$) $n \approx N_D = 4 \cdot 10^{22}\ e/m^3$ $\quad p = \frac{n_i^2}{n} \approx 1{,}39 \cdot 10^{16}\ h/m^3$

c) Como la concentración de impurezas aceptoras es mucho mayor que la concentración intrínseca ($3 \cdot 10^{22}$ >>> $2{,}36 \cdot 10^{19}$) $p \approx N_A = 3 \cdot 10^{22}\ h/m^3$ $\quad n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1{,}86 \cdot 10^{16}\ e/m^3$

d) $n = p = n_i = 2{,}1 \cdot 10^{22}\ e-h/m^3$

e) A 500 K, la concentración de las impurezas y la concentración intrínseca son del mismo orden, y la densidad de electrones y huecos tiene que ser calculada resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p \cdot n = n_i^2 \\ n = N_D + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \cdot n = (2{,}1 \cdot 10^{22})^2 \\ n = 3 \cdot 10^{22} + p \end{cases}$$

cuya solución es: $\quad n = 4{,}08 \cdot 10^{22}\ e/m^3 \qquad p = 1{,}08 \cdot 10^{22}\ h/m^3$

f) $$\begin{cases} p \cdot n = n_i^2 \\ N_A + n = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \cdot n = (2{,}1 \cdot 10^{22})^2 \\ 4 \cdot 10^{22} + n = p \end{cases}$$

cuya solución es: $\quad n = 2{,}1 \cdot 10^{22}\ e/m^3 \qquad p = 4{,}9 \cdot 10^{22}\ h/m^3$

11.2 Un semiconductor extrínseco de tipo n está formado por Si dopado con 10^{14} átomos de Sb/cm^3 (Sb es una impureza donadora). La concentración intrínseca del Si a 300 K es $n_i = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} y a 500 K $n_i = 3{,}7 \cdot 10^{14}$ cm^{-3}.

a) Encontrar la densidad de electrones y huecos en el semiconductor a 300 K.
b) Encontrar la densidad de electrones y huecos en el semiconductor a 500 K.

c) ¿Cuál sería la densidad de electrones y huecos a 300K si el semiconductor no estuviera dopado?

d) Si las movilidades de electrones y huecos a 300 K son μ_n=0,135 (m^2/Vs) y μ_p=0,05 (m^2/Vs) respectivamente, y la carga del electrón es $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ C$, calcular la conductividad del semiconductor en el caso a).

e) Razona si la carga eléctrica neta del semiconductor, en los tres casos, es positiva, negativa, o neutra.

Solución:

a) para encontrar n y p, tenemos que solucionar el sistema de ecuaciones dad por la ley de acción de masas y por la ley de neutralidad eléctrica:

$$\left.\begin{array}{c} n \cdot p = n_i^2 \\ N_A + n = N_D + p \end{array}\right\}$$

Pero en este caso, como el dopado es muy alto comparado con la densidad intrínseca (10^{14}>>>10^{10})

$$n \approx N_D = 10^{14}\ e^- / cm^3$$

y de la ley de acción de masas, $n \cdot p = 1,5^2 \cdot 10^{20} \Rightarrow p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{1,5^2 \cdot 10^{20}}{10^{14}} = 2,25 \cdot 10^6\ h / cm^3$

b) Ahora, la densidad de impurezas del dopante es del mismo orden que la densidad intrínseca (≈10^{14} en ambos casos), N_A=0 y N_D=10^{14} cm^{-3}. Por tanto, solucionando el sistema de ecuaciones dado por la ley de acción de masas y la de neutralidad eléctrica:

$$\left.\begin{array}{c} n \cdot p = 3,7^2 \cdot 10^{28} \\ n = 10^{14} + p \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 4,28 \cdot 10^{14} e^- / cm^3 \\ p = 3,23 \cdot 10^{14}\ h / cm^3 \end{array}\right.$$

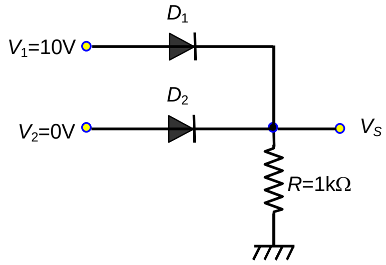
c) Si el material no está dopado, las densidades de electrones y huecos son la densidad intrínseca: $n = p = n_i = 1,5 \cdot 10^{10}$ cm^{-3}

d) La conductividad de un semiconductor se puede escribir como $\sigma = q_e \left(n\mu_n + p\mu_p \right)$:

$\sigma = q_e \left(n\mu_n + p\mu_p \right) \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{14} \cdot 10^6 \cdot 0,135 = 2,16\ \left(\Omega m \right)^{-1}$ (El término correspondiente a los huecos ha sido despreciado porque es muy pequeño comparado con el de los electrones. En todo caso, también es correcto considerarlo).

e) La carga eléctrica de un semiconductor es neutra siempre, debido a la ley de neutralidad eléctrica.

Lección 12: Dispositivos semiconductores



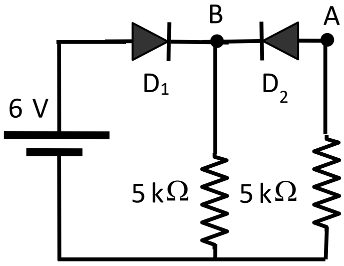
12.1 En el circuito de la figura, calcula el voltaje en la salida (V_s), así como las intensidades de corriente en ambos diodos. Los diodos D_1 y D_2 son de Si (tensión umbral $V_u=0,7\ V$).

Solución:

D_1 está polarizado en directo, y D_2 en inversa. Sus resistencias internas se desprecian. Por tanto

$$V_s = 10 - 0,7 = 9,3\,V \qquad I_1 = \frac{9,3}{1} = 9,3\,mA \qquad I_2 = 0$$

12.2 En el circuito de la figura, todos los diodos tienen una tensión umbral $V_u=0,7\ V$, y puede despreciarse su resistencia interna. Calcula:



a) Las intensidades I_1 e I_2 que recorren los diodos D_1 y D_2.
b) La diferencia de potencial V_A-V_B entre los terminales del diodo D_2.

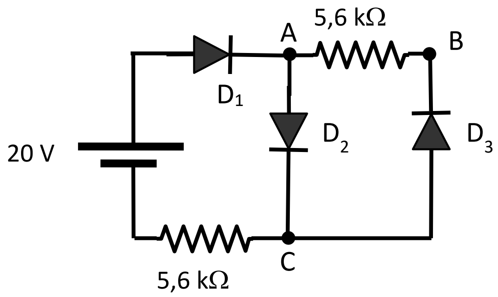
Solución:

a) D_1 está polarizado directamente, y D_2 inversamente. Las resistencias internas pueden despreciarse. Por tanto

$$I_1 = \frac{6-0,7}{5} = \frac{5,3}{5} = 1,06\ mA$$ En el sentido de las agujas del reloj. $$I_2 = 0$$

b) $V_A - V_B = I_2 \cdot 5 - I_1 \cdot 5 = -5,3\,V$

12.3 En el circuito de la figura, todos los diodos tienen una tensión umbral $V_u=0,7\ V$, y resistencia interna despreciable (también la fuente de tensión).



a) En la tabla siguiente, marca con una cruz la polarización correcta (directa o inversa) de cada diodo:

Diodo	Directa	Inversa
D_1		
D_2		
D_3		

b) Calcula las intensidades I_1, I_2 e I_3 que circulan por los diodos D_1, D_2 y D_3.
c) Calcula las diferencias de potencial V_A-V_C y V_C-V_B.

Solución:

a)

Diodo	Directa	Inversa
D_1	X	
D_2	X	
D_3		X

b) $I_1 = I_2 = \frac{20-0,7-0,7}{5,6} = 3,32\,mA \qquad I_3 = 0$

c) Como D_2 está polarizado directamente $V_A - V_C = 0,7\,V$

Por otro lado, como $I_3=0$, $V_A - V_B = 0$ y por tanto $V_C - V_B = V_C - V_A = -0,7\,V$