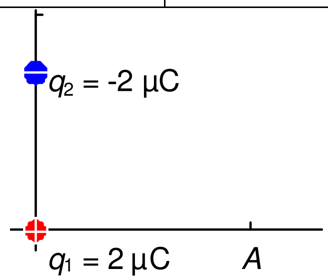
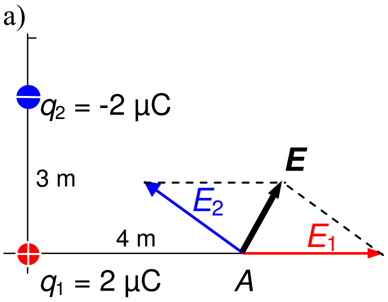
Primer parcial de FFI
17 d'Octubre del 2010
Curs 2011/12

Dpto. Física Aplicada

1. Si tenim les càrregues puntuals de la figura, situades a l'origen de coordenades i al punt (0,3), calculeu: *a)* El camp elèctric resultant en el punt *A*(4,0) m. Apliqueu el principi de superposició, tot dibuixant, al gràfic, els camps que exerceix cada càrrega per separat. b) El treball realitzat per les forces del camp elèctric per traslladar una càrrega puntual negativa d'1μC des del punt A (4,0) fins al punt B (4,3). 1,5 punts	**1.** Dadas las cargas puntuales de la figura, situadas respectivamente en el origen de coordenadas y en el punto (0,3) calcula: a) El campo eléctrico resultante en el punto *A*(4,0) m. Aplica el principio de superposición dibujando en el gráfico los campos que ejerce cada carga por separado. b) Trabajo realizado por las fuerzas del campo eléctrico para llevar una carga de 1 μC del punto A (4,0) al punto B (4,3). 1,5 puntos



a)



$$\vec{E}_1 = k\frac{Q_1}{r_{1A}^2}\vec{u}_{1A} = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-6}}{16}\vec{i} = \frac{9000}{8}\vec{i} = 1125\vec{i}\ N/C$$

$$\vec{E}_2 = k\frac{Q_2}{r_{2A}^2}\vec{u}_{2A} = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-6}}{25}\left(\frac{-4\vec{i}+3\vec{j}}{5}\right) = \frac{18000}{125}\left(-4\vec{i}+3\vec{j}\right) = 144\left(-4\vec{i}+3\vec{j}\right)N/C$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 549\vec{i} + 432\vec{j}\ \text{N/C}$$

b) $V_A = k\dfrac{Q_1}{r_{1A}} + k\dfrac{Q_2}{r_{2A}} = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}\left(\dfrac{2}{4}-\dfrac{2}{5}\right) = 900\ V$

$$V_B = k\frac{Q_1}{r_{1B}} + k\frac{Q_2}{r_{2B}} = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{4}\right) = -900\ V$$

$$W_{AB} = -q\Delta V = -10^{-6}(-900-900) = 1{,}8\cdot 10^{-3}\ J$$

2. Enuncieu el teorema de Gauss i apliqueu-lo per calcular el camp elèctric creat per una esfera, de radi R, carregada amb una densitat superficial de càrrega σ a una distància R/2 del seu centre. 1,5 punts	**2.** Enuncia el teorema de Gauss y aplícalo para calcular el campo eléctrico creado por una esfera de radio *R* cargada con una densidad superficial de carga σ a una distancia R/2 de su centro. 1,5 puntos

a) Teorema de Gauss:

"El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total

encerrada en dicha superficie dividido por ε_0"

b) Aplicamos el teorema de Gauss en una esfera de Radio R/2.

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S EdS = ES$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Como Q_{enc} es igual a cero entonces el flujo también lo és y por tanto E=0.

3. Quin és el valor del camp elèctric a l'interior d'un conductor carregat i en equilibri electrostàtic? Què ocorre amb la càrrega i el potencial electrostàtic? Quina direcció duen les línies de camp en punts molt pròxims al conductor? Cal justificar les respostes. 1,5 punts	**3.** ¿Cuánto vale el campo eléctrico en el interior de un conductor cargado y en equilibrio electrostático? ¿Qué ocurre con la carga y el potencial electrostático? ¿Qué dirección llevan las líneas de campo eléctrico en puntos muy próximos al conductor? Se deben justificar las respuestas. 1,5 puntos

(0.4p)**E**: Para que el conductor esté en equilibrio el campo eléctrico en cualquier punto del interior del conductor debe ser nulo $\vec{E} = 0$, en caso contrario actuarían fuerzas eléctricas sobre las cargas y éstas no podrían estar en equilibrio.

(0.4p) Q: Si el campo eléctrico es nulo en el interior, aplicando el teorema de Gauss a cualquier superficie cerrada dentro del conductor el flujo será nulo, y por lo tanto **la carga encerrada será nula** ($\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$), por lo que la densidad volumétrica de carga en el interior del conductor será cero (ρ = 0). Si el conductor está cargado, la carga necesariamente debe distribuirse sobre la superficie exterior.

(0.4p) V: Como el campo eléctrostático es nulo en el interior del conductor, **la diferencia de potencial** entre dos puntos cualesquiera del conductor será asimismo nula ($V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$) y, por lo tanto, el potencial será constante en todo el volumen del conductor. De esta forma el volumen y la superficie del conductor son equipotenciales.

(0.3p) Dirección de las líneas de campo **E** en puntos próximos: Dado que la superficie del conductor es equipotencial, el campo eléctrico en sus proximidades será perpendicular a la superficie.

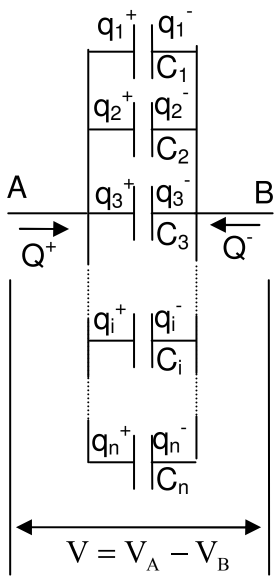
4. Definiu capacitat equivalent d'una associació de condensadors. Demostreu que la capacitat equivalent d'una associació de n condensadors en paral·lel és $C_{eq} = \sum_i^n C_i$ 1,5 punts	**4.** Define capacidad equivalente de una asociación de condensadores. Demuestra que la capacidad equivalente de una asociación de n condensadores en paralelo es, $C_{eq} = \sum_i^n C_i$ 1,5 puntos

Una definició vàlida la trobem al capítol 2 dels apunts de l'assignatura:

Es defineix la *capacitat equivalent* d'una associació de condensadors com la capacitat d'un únic condensador tal que en aplicar-li la mateixa diferència de potencial que a l'associació, emmagatzeme la mateixa quantitat de càrrega.

Si tenim n condensadors associats en paral·lel, en aplicar una ddp, V_A-V_B, a l'associació, s'introduirà dins del conjunt una càrrega Q que es distribuirà entre els condensadors, de manera que:

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_i + \cdots + q_{n-1} + q_n$$



En l'associació, tots els condensadors estan sotmesos a la mateixa ddp, complint-se la relació:

$$C_i = \frac{q_i}{V_A - V_B}$$

on q_i és la càrrega emmagatzemada al condensador de capacitat C_i

El condensador equivalent serà aquell de capacitat

$$C_{eq} = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

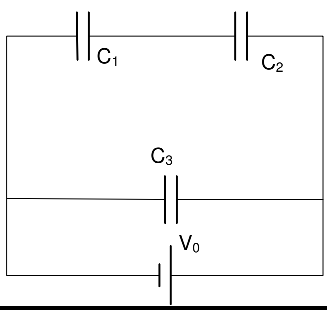
Si substituïm, en l'equació de la capacitat equivalent, el valor de Q:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_i + \cdots + q_{n-1} + q_n}{V_A - V_B} = \frac{q_1}{V_A - V_B} + \frac{q_1}{V_A - V_B} + \frac{q_1}{V_A - V_B} +$$

$$+ \frac{q_1}{V_A - V_B} + \cdots + \frac{q_1}{V_A - V_B} + \cdots + \frac{q_1}{V_A - V_B} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_i + \cdots + C_{n-1} + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Llavors, la capacitat equivalent d'un sistema de condensadors en sèrie és

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

5. La figura mostra 3 condensadors iguals de capacitat C, connectats a una diferència de potencial V_0 a) Trobeu la càrrega de cada condensador. b) Si retirem la font de tensió i introduïm un dielèctric de permitivitat relativa 5 al condensador C_3, trobeu la càrrega de cada condensador després d'introduir el dielèctric. 2 punts	**5.** La figura muestra 3 condensadores iguales de capacidad *C*, conectados a una diferencia de potencial V_0 a) Halla la carga en cada condensador. b) Retiramos la fuente de tensión e introducimos un dieléctrico de permitividad relativa 5 en el condensador C_3. Halla la carga en cada condensador después de introducir el dieléctrico. 2 puntos
	

a) Los condensadores 1 y 2 están en serie y su capacidad equivalente es:

$$C_{1,2} = \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C}\right)^{-1} = \frac{C}{2}$$

A su vez este condensador equivalente está en paralelo con el C_3 y la capacidad equivalente del conjunto, es:

$$C_{eq} = \sum C_i = \frac{C}{2} + C = \frac{3C}{2}$$

La carga total del conjunto, a la d.d.p. V_0 es: $Q_T = C_{eq}V_0 = \frac{3}{2}CV_0$

Los condensadores 1 y 2, al estar en serie tienen la misma carga,

$$Q_1 = Q_2 = C_{1,2}V_0 = \frac{CV_0}{2}$$

Y la carga del condensador 3 es: $Q_3 = CV_0$

b) Al desconectar la fuente del conjunto y estar aislado el sistema la carga total del mismo permanece constante, pero al introducir un dieléctrico en el condensador 3, éste cambia su capacidad y hay un nuevo reparto de cargas, pero siempre manteniéndose la carga total constante.

Así tenemos:

$$Q'_1 = Q'_2 \qquad Q'_1 + Q'_3 = Q_T = \frac{3}{2}CV_0$$

La capacidad del condensador 3, al introducir el dieléctrico pasa a ser $C'_3 = 5C$, y al estar el conjunto de los condensadores 1 y 2 en paralelo con el condensador 3, es decir a la misma d.d.p., tenemos:

$$\frac{Q'_1}{C/2} = \frac{Q'_3}{5C} \qquad 10Q'_1 = Q'_3$$

Resolviendo el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, obtenemos:

$$Q'_1 = Q'_2 = \frac{3}{22}CV_0 \qquad Q'_3 = \frac{30}{22}CV_0$$

6. La figura mostra una esfera metàl·lica buida de radis interior i exterior R_1 i R_2, respectivament. Aquesta esfera es troba connectada a terra. Es col·loca una càrrega puntual positiva, Q, al centre de l'esfera.

a) Quina és la distribució de càrregues a les superfícies interior i exterior de l'esfera?

b) Obteniu les expressions de $E(r)$ per a $r< R_1$, $R_1< r<R_2$, $r> R_2$.

b) Obteniu les expressions de $V(r)$ per a $r\leq R_1$, $R_1\leq r\leq R_2$, $r\geq R_2$.

2 punts

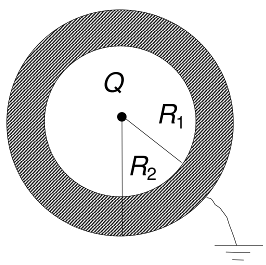
6. La figura muestra una esfera metálica hueca de radios interior y exterior R_1 y R_2, respectivamente. Dicha esfera se encuentra conectada a tierra. Se coloca una carga puntual positiva, Q, en el centro de la esfera.

a) ¿Cuál es la distribución de cargas en las superficies interior y exterior de la esfera?

b) Obtén la expresiones de $E(r)$ para $r< R_1$, $R_1< r< R_2$ y $r> R_2$.

c) Obtén la expresiones de $V(r)$ para $r\leq R_1$, $R_1\leq r\leq R_2$ y $r\geq R_2$.

2 puntos



a) En la superficie interior de la esfera, por influencia electrostática de la carga Q, aparece una carga –Q C, y en la superficie exterior, al estar conectada la esfera a tierra, la carga es nula.

b) $r<R_1$

Aplicando el teorema de Gauss a una esfera de radio r:

$$\phi = \int_{esfera} \vec{E}d\vec{S} = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad N/C$$

$R_1<r<R_2$ y $r>R_2$, E=0, por tratarse de un conductor en equilibrio electrostático conectado a tierra sin cargas exteriores.

c) $R_1<r<R_2$ y $r>R_2$, V=0, por tratarse de un conductor en equilibrio electrostático conectado a tierra sin cargas exteriores.

$r<R_1$

Calculando la d.d.p. entre un punto de radio r y un punto de la superficie interior de la esfera conductora (radio R_1), a lo largo de una línea de campo (línea recta L) entre r y R_1. Y teniendo en cuenta que el potencial de la esfera es nulo ($V_{R1}=0$):

$$V_r - V_{R_1} = V_r = \int_L \vec{E}d\vec{r} = \int_r^{R_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right) \quad V$$

Formulari:

$$\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad U = K\frac{q_1 q_2}{r} \qquad W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_A - U_B$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9x10^9\ \frac{kg\ m^3}{A^2 s^4} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \qquad \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = (V_A - V_B) = -\Delta V$$

$$V = \frac{U}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad C = \varepsilon_0\frac{S}{d} \qquad W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \vec{E}_d = \frac{\vec{E}}{\varepsilon_r} \qquad \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$$