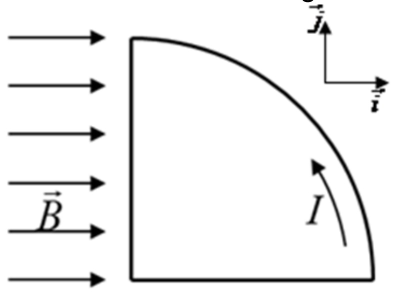
5.- Una espira en forma de cuadrante de circunferencia, (en el primer cuadrante, plano X0Y), tiene su vértice en el origen de coordenadas. Está en una región con campo magnético uniforme variable con el tiempo B=(Bo-Ct)i en dirección horizontal, i . Si dicha espira es recorrida por una corriente en sentido antihorario I, se pide, en el instante inicial, t=0.



a) fuerza magnética sobre el segmento vertical
b) fuerza magnética sobre el segmento horizontal
c) fuerza magnética sobre el segmento curvo
d) momento de las fuerzas magnéticas sobre la espira

Datos: Bo=50mT, R=20cm, I=300mA C=1mT/s

SOLUCIÓN

a) Dado que I es vertical, hacia abajo, y B es horizontal la expresión $\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$ es trivial:

$$\vec{F} = I\left|\vec{L}\right|\left|\vec{B}\right|\vec{k} \qquad \vec{F} = 0'3 \cdot 0'2 \cdot 0'05\vec{k} \qquad \vec{F} = 3\vec{k}\ mN$$

Donde el sentido de la fuerza se ha obtenido mediante la regla de la mano derecha. También podemos resolver el ejercicio haciendo simplemente (unidades SI)

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B} = 0'3\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -0'2 & 0 \\ 0'05 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0'3\left(-(-0'2 \cdot 0'05)\vec{k}\right) = 0'003\vec{k} \qquad \vec{F} = 3\vec{k}\ mN$$

b) Como el campo, $\boldsymbol{B}$, y el elemento de corriente, $\boldsymbol{IL}$, son paralelos, entonces su producto vectorial (la fuerza) es cero

c) Dado que B es uniforme, la fuerza no depende de la forma del conductor sino de la posición de sus extremos… podemos usar esto para simplificar la curva por línea recta… pero puede resolverse más fácil aún, sabiendo que la fuerza en todo el conductor será cero. De este modo se tiene

$$\vec{F}_{VERT} + \vec{F}_{HORIZ} + \vec{F}_{CURVA} = 0$$

$$3\vec{k}\ mN + 0 + \vec{F}_{CURVA} = 0$$

$$\vec{F} = -3\vec{k}\ mN$$

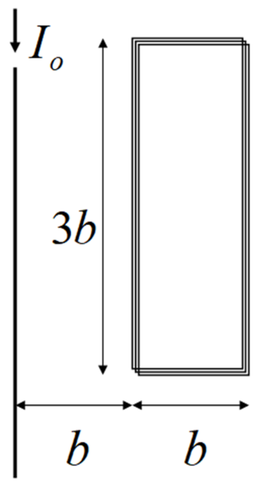
c) Se aplica la ecuación $\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

$$\vec{\tau} = \left|\vec{m}\right|\left|\vec{B}\right|\left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) \qquad \vec{\tau} = \left|\vec{m}\right|\left|\vec{B}\right|\left(\vec{j}\right) \qquad \vec{\tau} = I\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)Bo\left(\vec{j}\right)$$

$$\vec{\tau} = \frac{I\pi R^2 Bo}{4}\vec{j} \qquad \vec{\tau} = \frac{0'3\pi 0'2^2 0'05}{4}\vec{j} \qquad \vec{\tau} = 1'5\pi \cdot 10^{-4}\vec{j}Am^2$$

6.- Por un hilo conductor muy largo circula una corriente constante, I_o, hacia abajo. A una distancia b del mismo se encuentra una bobina compuesta por un número desconocido de espiras rectangulares, de lados b y 3b, según se indica en la figura. Se pide

a) Campo magnético en el centro de la bobina
b) flujo magnético a través de la superficie, S, delimitada por una espira rectangular de la bobina
c) coeficiente de inducción mutua entre hilo y bobina (en función de los datos conocidos y del número de espiras desconocido, llámese N)
d) A continuación se aplica una corriente variable al hilo conductor, i = D·t, en el mismo sentido de la figura. Se pide entonces número de espiras, N, sabiendo que la fem inducida en la bobina en el instante inicial es $\varepsilon = 27'8 \cdot \mu_o D b$



SOLUCIÓN

a) $\left|\vec{B}\right| = \dfrac{\mu_o I_1}{2\pi r}$ $\qquad \left|\vec{B}\right| = \dfrac{\mu_o I_1}{2\pi(1'5b)}$ $\qquad \left|\vec{B}\right| = \dfrac{\mu_o I_1}{3\pi b}$

b) Flujo elemental a través de un diferencial de superficie cartesiano vertical, es

$$d\phi = \left|\vec{B}\right| dS \qquad d\phi = \frac{\mu_o I_o}{2\pi r} 3b\,dr \qquad \phi = \frac{\mu_o I_o 3b}{2\pi}\int_b^{2b}\frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_o I_o b}{\pi}\frac{3}{2}\ln 2$$

c) Nótese que, para el cálculo de la inducción mutua, necesitamos el flujo a través de la bobina, es decir, N veces el flujo de la superficie

$$M = \frac{\phi_{BOB}}{I_{HILO}} \qquad M = \frac{N\phi}{I_1} \qquad M = \frac{N}{I_1}\left(\frac{\mu_o I_1 b}{\pi}\frac{3}{2}\ln 2\right)$$

$$M = \frac{\mu_o N b}{\pi}\frac{3}{2}\ln 2$$

d) Ley de Faraday-Lenz $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$, y sabemos que $\phi_{BOB} = M \cdot I_{HILO}$

De este modo

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{HILO}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{\mu_o N b}{\pi}\frac{3}{2}\ln 2\right)(D{\cdot}t)\right\}$$

Sacando las constantes fuera de la derivada

$$\varepsilon = -\left(\frac{\mu_o N b D}{\pi}\frac{3}{2}\ln 2\right)\frac{d}{dt}\{t\} \qquad \varepsilon = -\frac{\mu_o N b D}{\pi}\frac{3}{2}\ln 2$$

Cuyo valor es constante, y por tanto también en el instante inicial

Reagrupando

$$\varepsilon = -\mu_o D b\left(N\frac{3}{2}\frac{\ln 2}{\pi}\right)$$

Y, a partir del dato conocido de ε, podemos hallar N

$$\varepsilon = -\left(N\frac{3}{2}\frac{\ln 2}{\pi}\right)\mu_o D b$$

$$\varepsilon \cong -27'8 \cdot \mu_o D b \qquad \left(N\frac{3}{2}\frac{\ln 2}{\pi}\right) \cong 27'8 \qquad N \cong 27'8\frac{2\pi}{3\ln 2}$$

$$N \cong 84$$

7.- Un circuito RLC serie, con L=98mH, C=2 nF y R desconocida es alimentado por una tensión alterna senoidal de valor máximo (amplitud) 21 V. La intensidad de corriente viene dada por la expresión, en SI:

$$i = 4'2 \cdot 10^{-3} \cos(10^5\ t)$$

Se pretende conocer:

a) Impedancia (módulo) del dipolo RLC
b) Demuestra que el valor de la resistencia es de 1'4 kΩ
c) desfase entre tensión e intensidad y ecuación instantánea de la tensión
d) Frecuencia de resonancia

Si ahora alimentamos el circuito con la frecuencia de resonancia, manteniendo la amplitud de la tensión, se pide:

e) Amplitud de la intensidad y valor de la impedancia

SOLUCIÓN

a) De su propia definición, la impedancia se obtiene como

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|} \qquad |Z| = \frac{21}{0'0042} = 5k\Omega$$

b) El módulo de la impedancia se expresa como sigue

$$|\vec{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

De donde podemos despejar el valor de la resistencia

$$R = \sqrt{|\vec{Z}|^2 - X^2}$$

Y ahora, dado que conocemos la impedancia, $|Z|$, solo necesitemos calcular la reactancia, X, como sigue

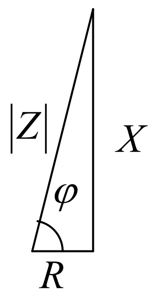
$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0'098 \cdot 10^5 - \frac{1}{210^{-12} \cdot 10^5} \qquad X = 4'8k\Omega$$

Conocidos $|Z|$ y X ya solo resta obtener R

$$|\vec{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad R = \sqrt{5^2 - 4'8^2} \qquad R = 1'4k\Omega$$

c) A partir del "triángulo de impedancias" podemos obtener el desfase, φ, indistintamente como $\phi = sin^{-1}\frac{X}{|Z|}$, $\phi = tan^{-1}\frac{X}{R}$, $\phi = cos^{-1}\frac{R}{|Z|}$

$$\varphi = 1'287 \text{ rad}$$



De la ecuación de la tensión lo conocíamos todo, y solo nos quedaba la fase que acabamos de obtener

$$V = 21\cos(10^5\ t + 1'287)$$

d) La frecuencia de resonancia se obtiene como

$$0 = L\omega_o - \frac{1}{C\omega_o} \qquad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_o \cong 71428 s^{-1}$$

y dada la relación entre pulsación y frecuencia $\omega = 2\pi f$, $\quad f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} \cong 11368 Hz$

e) Por otra parte, como la impedancia -en resonancia- se limita a ser la resistencia, la corriente queda como

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} \qquad |I| = \frac{|V|}{R} = \frac{21}{1400} = 15mA$$

Así, con un origen de tiempos arbitrario, sabiendo que tensión e intensidad están en fase por estar en resonancia, se tiene

$$V = 21\cos(71428\,t) \qquad i = 15\cdot 10^{-3}\cos(71428\,t)$$

8.- Un semiconductor extrínseco tipo p está formado por Si dopado con $6\cdot10^{20}$ átomos de Ga/m^3 (Ga es un aceptor de e-). La concentración intrínseca del Si a 305K es $n_i=1{,}5\cdot10^{16}m^{-3}$ y a 513K $N_i=4\cdot10^{20}m^{-3}$
a) Calcula la concentración de electrones y huecos en dicho semiconductor a 305 K.
b) Calcula la concentración de electrones y huecos en dicho semiconductor a 513 K.
c) ¿Cuál sería la concentración de huecos y electrones a 305K si el semiconductor no estuviera dopado?
d) Si las movilidades de electrones y huecos a 305K son respectivamente, $\mu_n = 0{,}135\ m^2/Vs$, $\mu_p = 0{,}05\ m^2/Vs$ y la carga del electrón $1'6\cdot10^{-19}C$, calcula la densidad de corriente, *J*, a través del semiconductor si se aplica un campo exterior de módulo E= 250V/m

SOLUCIÓN

a) Como la concentración de huecos debida al dopaje es muy superior a la intrínseca

puede aceptarse $N_A \cong p$, y de ahí $n = \frac{n_i^2}{p} \cong \frac{n_i^2}{N_A} = \frac{\left(1'5\cdot10^{16}\right)^2}{6\cdot10^{20}} = 3'75\cdot10^{11}m^{-3}$

$$p \cong 6\cdot10^{20}m^{-3}$$

b) Como ahora concentración intrínseca es del mismo orden que la asociada al dopaje, no podemos simplificar, resolvemos pues el sistema completo

$$N_A + n = N_D + p \qquad \left.\begin{matrix} N_A + n = 0 + p \\ np = n_i^2 \end{matrix}\right\} n\left(N_A + n\right) = n_i^2$$

$$n^2 + N_A n - n_i^2 = 0 \qquad n = \frac{-N_A \pm \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2}$$

Que se resuelve obteniendo $n = 2\cdot10^{20}m^{-3}$, $p = 8\cdot10^{20}m^{-3}$

c) Cuando el conductor no está dopado, por neutralidad de la carga se tiene que n=p, y dada la conocida ley $n\cdot p=n_i^2$ podemos concluir que

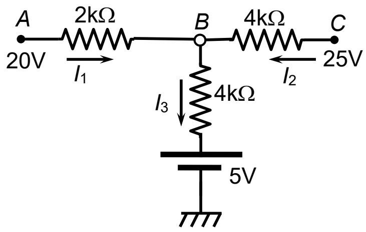
$$n = p = n_i = 1'5\cdot10^{16}m^{-3}$$

d) Se trata de aplicar la expresión $\vec{J} = e\left(n\mu_n + p\mu_p\right)\vec{E}$

$$\left|\vec{J}\right| \cong 1'6\cdot10^{-19}\left(0 + 6\cdot10^{20}0'05\right)250 \qquad \left|\vec{J}\right| \cong 1200A/m^2$$

9.- Dado el circuito de la figura,
a) Determina las intensidades de rama I_1, I_2, e I_3 mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Generador equivalente de Thevenin entre *B* y tierra.
c) Si conectamos una nueva resistencia de 4 kΩ directamente de B a tierra, ¿Qué corriente circulará por ella? (valor y sentido).



SOLUCIÓN
Por simplicidad se opera directamente en V y kΩ, sabiendo que los resultados saldrán en mA. No se ha usado pues el sistema internacional en las operaciones numéricas.

a) Aplicamos Kirchhoff a nudos y mallas:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$2I_1 + 4I_3 = 15$$
$$4I_2 + 4I_3 = 20$$

La solución de este sistema se puede resolver de distintas maneras. Por ejemplo,

matricialmente $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix},$$

que resolvemos como $$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

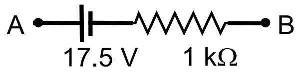
$$I_1 = 1'25\text{mA} \qquad I_2 = 1'875\text{mA} \qquad I_3 = 3'125\text{mA}$$

a) La diferencia de potencial entre B y tierra será:

V_B= 20 - (1.25*4) = 17.5 V

Y la resistencia es la equivalente a las tres resistencias en paralelo:

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{-1} = 1\,\text{k}\Omega$$

Y el generador queda: 

b) La corriente a partir del equivalente Thevenin, se obtiene como:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{17{,}5}{1+4} = 3{,}5mA$$