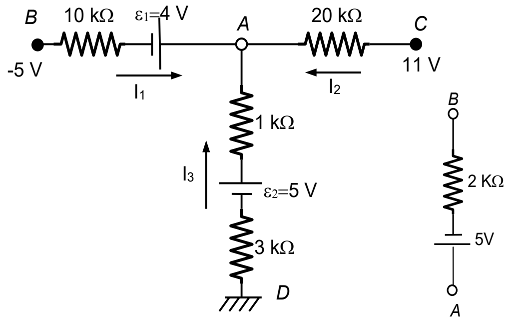
1. Dado el circuito de la figura, calcula:

a) Las intensidades que circulan por cada una de las ramas utilizando las leyes de Kirchhoff. Indica si los elementos ε_1 y ε_2 actúan como receptores o generadores.

b) El generador equivalente de Thevenin entre A y B, indicando claramente su polaridad.

c) Si se conecta la rama de la derecha a *A y B*, indica si el elemento añadido de 5 V consume o genera potencia y calcula su valor.

d) El generador equivalente de Thevenin entre B y D indicando su polaridad.



Solución:

a) Aplicamos al circuito las leyes de Kirchhoff.

Ley de los nudos: $\Sigma I = 0 \qquad I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Ley de las mallas:

$$V_B - V_D = -5 = 10I_1 - 4 - 4I_3 + 5$$

$$V_C - V_D = 11 = 20I_2 - 4I_3 + 5$$

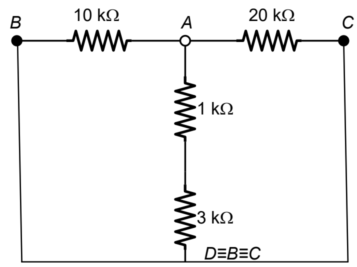
Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$I_1 = -\frac{21}{40} = -0{,}525 \text{ mA} \quad I_2 = \frac{27}{80} = 0{,}337\ mA \quad I_3 = \frac{3}{16} = 0{,}187\ \text{ mA}$$

El elemento ε_1 actúa como receptor y el elemento ε_2 actúa como generador

b) Resistencia equivalente entre B y A:

Observando el circuito pasivo, vemos que las resistencias de 1 y 3 kΩ están en serie y a su vez, en paralelo con las resistencias de 20 y 10 kΩ, de esta manera, tenemos:



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{1}{R_{eq}}; \qquad R_{eq} = \frac{5}{2} = 2{,}5k\Omega$$

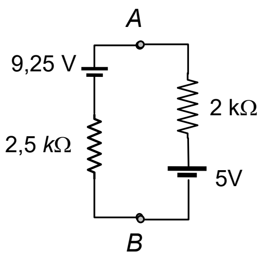
Generador de Thèvenin entre A y B:

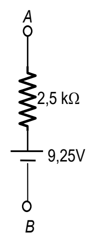
$$\varepsilon_T = V_A - V_B = -10I_1 + 4 = \frac{37}{4} = 9{,}25V$$

$$R_{eq} = 2{,}5k\Omega$$

El polo positivo del generador equivalente de Thevenin conectado al punto A.

c)





Si conectamos a los puntos A y B la resistencia de 2KW y el dipolo de 5V, la intensidad que circula utilizando Thèvenin es:

$$I = \frac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma R} = \frac{9{,}25 - 5}{2{,}5 + 2} = \frac{17}{18} = 0{,}94\ mA$$

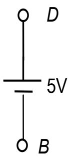
observamos que el elemento de 5 V actúa como receptor y la potencia consumida por el mismo es:

$$P_c = \varepsilon I = 5\frac{17}{18} = \frac{85}{18} = 4{,}72\ mW$$

d) Generador equivalente de Thevenin entre BD

$\varepsilon_T = V_B - V_D = -5V$

$R_{eq} = 0$

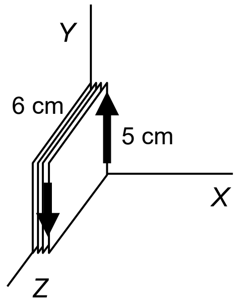


2. Por un conjunto de 80 espiras de 5 cm de largo por 6 cm de ancho situadas en el plano ZY, tal como muestra la figura, circula una corriente de 6 A en el sentido indicado. Las espiras están situadas en un campo magnético de valor $\vec{B} = -\vec{\imath} + 2\vec{k}\ T$. Calcula:

a) Momento magnético de la bobina.

b) Momento de las fuerzas magnéticas que actúan sobre la bobina. Indica alrededor de qué eje y en qué sentido girarán las espiras.

c) Fuerza magnética sobre todos los hilos del lado coincidente con el eje Z.



Solución

a) Momento magnético: $\vec{m} = I \cdot \vec{S} = 6(0{,}05 \cdot 0{,}06 \cdot 80)\vec{\imath} = 1{,}44\vec{\imath}\ Am^2$

b) Momento de las fuerzas:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1.44 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -2 \cdot 1{,}44\vec{\jmath} = -2{,}88\vec{\jmath}\ Nm$$

El eje de giro será el propio del vector unitario del momento, es decir el eje Y. Al ser el momento negativo, el sentido de giro respecto al eje Y será el sentido horario.

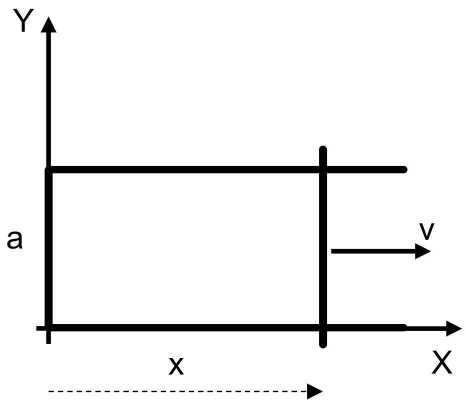
c) Calculamos la fuerza magnética sobre un hilo de los que estén en el eje Z:

$$\vec{F} = i\int\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) = i\left(\vec{L} \times \vec{B}\right) = 6 \cdot \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -0{,}06 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0{,}36\vec{\jmath}\ N$$

Dado que tenemos 80 hilos:

$$\vec{F}_{Tot} = 80 \cdot 0{,}36\vec{\jmath} = 28{,}8\vec{\jmath}\ N$$

3. Una espira rectangular con un lado móvil, tiene lados a = 1 m y x = 2 m en el instante t=1 s y está sometida a un campo magnético uniforme que varía con el tiempo siguiendo la ecuación $\vec{B} = 3t\vec{k}\ T$. El lado derecho de la espira se mueve hacia la derecha con velocidad constante v=2 m/s. Sabiendo que la espira tiene una resistencia eléctrica de 100 Ω, calcular para la posición de la figura, en t=1 s:



a) El flujo del campo magnético a través de la espira.

b) La fuerza electromotriz inducida.

c) La intensidad de la corriente inducida, indicando su sentido.

d) La fuerza que aparece sobre el lado móvil de la espira debido al efecto del campo sobre el conductor.

Solución:

a) Flujo de un campo homogéneo:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = 3t\vec{k} \cdot ax\vec{k} = 3tax = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 6\,Wb$$

Es igualmente correcto el valor -6 Wb si se considera el vector superficie en la dirección negativa del eje Z.

b) $|\epsilon_i| = \frac{d\phi}{dt}$. Para calcular la derivada del flujo tomaremos la expresión previa $\phi = 3tax$. Como x depende del tiempo según la expresión x=vt, resulta $\phi = 3tavt = 3avt^2$. Y la fem inducida:

$$|\epsilon_i| = \frac{d\phi}{dt} = 3av2t = 6avt$$

Para t=1 tenemos: $|\epsilon_i| = 6avt = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12\,V$

c) La intensidad de corriente se calcula mediante la ley de Ohm: $i = \frac{|\epsilon_i|}{R} = \frac{12}{100} = 0{,}12\,A$

A medida que transcurre el tiempo aumenta el campo y aumenta la superficie, por lo que el flujo saliente desde el papel hacia el lector aumenta. Frente a este aumento de flujo, la corriente inducida debe crear un flujo entrante en el papel, lo que se consigue con una intensidad de corriente en el sentido de las agujas del reloj.

d) Calculamos la fuerza magnética sobre el lado móvil en t=1s:

$$\vec{F} = i\int \left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) = i\left(\vec{L} \times \vec{B}\right) = 0{,}12 \cdot \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -0{,}36\vec{\imath}\,N$$

4. Un circuito de corriente alterna tiene una resistencia de 30 Ω, una bobina de 20 mH y un condensador de 50 µF conectados en serie. Si la tensión total en los extremos del dipolo *RLC* es u(t)=2cos (500*t* - 60°) V, halla:

a) Valor instantáneo de la intensidad.
b) Caída de tensión instantánea en cada elemento.
c) Diagrama fasorial con las magnitudes anteriores.
d) Frecuencia de resonancia del circuito

Solución:

a) Comenzamos hallando las reactancias:

$X_L = L\omega = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 500 = 10\ \Omega$ $\qquad$ $X_C = 1/C\omega = 10^6/(50 \cdot 500) = 40\ \Omega$

La impedancia del circuito es: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2} = 42{,}43\ \Omega$

Y el desfase entre tensión e intensidad: $\phi = \phi_U - \phi_I = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\left(\frac{-30}{30}\right) = -45º$

La intensidad máxima que circula por los tres elementos es:

$i_m = U_m/Z = 2/\left(30\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}/30 = 0{,}047$ A, cuya fase es $\phi_I = \phi_U - \phi = -60 + 45º = -15º$:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{30}\cos(500t - 15º) = 0{,}047\cos(500t - 15º)$$

La tensión máxima en la resistencia es $u_{Rm} = i_m R = \frac{\sqrt{2}}{30}30 = \sqrt{2} = 1{,}41\,V$

por lo que su expresión instantánea es:

$$u_R(t) = \sqrt{2}\cos(500t - 15º) = 1{,}41\cos(500t - 15º)\ V$$

La tensión máxima en la bobina es $u_{Lm} = i_m X_L = \frac{\sqrt{2}}{30}10 = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}47\,V$ por lo que su expresión instantánea es:

$$u_L(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(500t + 75º) = 0{,}47\cos(500t + 75º)\ V$$

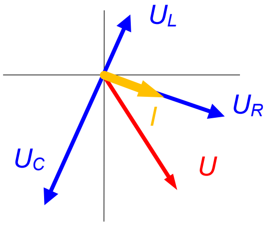
ya que la tensión en la bobina está 90º adelantada respecto de la intensidad.

La tensión máxima en condensador es $u_{Cm} = i_m X_C = \frac{\sqrt{2}}{30}40 = \frac{4\sqrt{2}}{3} = 1{,}88\,V$, por lo que su expresión instantánea es:

$$u_C(t) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos(500t - 105º) = 1{,}88\cos(500t - 105º)\ V$$

ya que la tensión en el condensador está 90º retrasada respecto de la intensidad.

c)



d) $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20\cdot10^{-3}\cdot50\cdot10^{-6}}} = \frac{500}{\pi} = 159{,}15\ \mathrm{Hz}$

5. Una barra de silicio tiene de 50 cm de longitud. El silicio se encuentra dopado con impurezas donadoras de tal modo que la concentración de electrones es de $5\cdot10^{16}$ e^-/m^3. Sabiendo que la concentración intrínseca del silicio a la temperatura de trabajo vale $1{,}7\cdot10^{16}$, calcula:

a) la concentración de huecos.
b) la concentración de impurezas donadoras.
c) la resistividad del semiconductor.
d) velocidad de arrastre de electrones y huecos si se establece entre los extremos de la barra una diferencia de potencial de 10 V.

Datos: Movilidad electrones en el silicio a 300 K
$\mu_n = 0{,}135\ m^2/Vs$;
Movilidad huecos en el silicio a 300 K
$\mu_p = 0{,}05\ m^2/Vs$
Carga del electrón, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C

Solución

a) Vamos a utilizar la ley de acción de masas:

$$pn = n_i^2 \implies p\cdot5\cdot10^{16} = 2{,}89\cdot10^{32} \Rightarrow p = \frac{2{,}89\cdot10^{32}}{n} = \frac{2{,}89\cdot10^{32}}{5\cdot10^{16}} = 5{,}78\cdot10^{15}\ h/\mathrm{m}^3$$

b) Según la ley de neutralidad eléctrica

$$N_D = 5 \cdot 10^{16} - p = 5 \cdot 10^{16} - 0{,}578 \cdot 10^{16} = 4{,}42 \cdot 10^{16} \text{ átomos/m}^3$$

c) La conductividad vale:

$$\sigma = q\left(n\mu_n + p\mu_p\right) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}(5 \cdot 0{,}135\ + 0{,}578 \cdot 0{,}05) \cdot 10^{16} = 1{,}126 \cdot 10^{-3}\ (\Omega\text{m})^{-1}$$

Y la resistividad: $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{1{,}126 \cdot 10^{-3}}\ (\Omega\text{m})^{-1} = 888\ \Omega\text{m}$

d) El campo eléctrico en la barra es: $E = \frac{V}{d} = \frac{10}{0{,}5} = 20\ \text{Vm}^{-1}$, por lo que las movilidades de electrones y huecos valen

$$v_n = \mu_n E = 2{,}7\ \text{m/s}$$
$$v_p = \mu_p E = 1\ \text{m/s}$$

Corriente continua $\vec{J} = n \cdot e \cdot \vec{v}_d$ $\quad \vec{J} = \sigma\vec{E}$ $\quad R = \dfrac{V_1 - V_2}{I}$ $\quad R = \rho\dfrac{L}{S}$

$\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$ $\quad P_R = IV = I^2R = \dfrac{V^2}{R}$ $\quad V_A - V_B = I\sum R - \sum\varepsilon$ $\quad I = \dfrac{\sum\varepsilon}{\sum R}$ $\quad P = V \cdot I$

$\varepsilon = \dfrac{dW}{dq}$ $\quad P_g = \varepsilon \cdot I$ $\quad P_t = \varepsilon' \cdot I$ $\quad P_g - P_r = P_s$ $\quad P_t + P_{r'} = P_c$

$\eta_g = \dfrac{P_s}{P_g}$ $\quad \eta_r = \dfrac{P_t}{P_c}$

Fuerzas magnéticas $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ $\quad d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ $\quad \vec{m} = N \cdot I \cdot \vec{S}$ $\quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

$V_H = \dfrac{I \cdot B \cdot d}{n \cdot e \cdot S}$

Fuentes del campo magnético $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$ $\quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (S.I. unidades)

$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

$B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$ $\quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$ $\quad B = \dfrac{\mu_0 NI}{l}$

Inducción electromagnética $|\varepsilon| = \dfrac{d\phi}{dt}$ $\quad \phi = L \cdot I$ $\quad \phi_{21} = M \cdot I_1$ $\quad W_L = \dfrac{1}{2}L \cdot I^2$

Corriente alterna $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ $\quad X_L = L\omega$ $\quad X_C = \dfrac{1}{C\omega}$ $\quad U_{eficaz} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$

$I_{eficaz} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

$tg\varphi = \dfrac{L\omega - 1/C\omega}{R}$ $\quad Z = \dfrac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - 1/c\omega\right)^2}$

$f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

Semiconductores $n \cdot p = n_i^2$ $N_A + n = N_D + p$ $\sigma = q_{e^-}(n\mu_n + p\mu_p)$

$\vec{v}_n = -\mu_n \cdot \vec{E}$ $\vec{v}_p = \mu_p \cdot \vec{E}$ $q_{e^-} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$