P1.-Enuncia el Teorema de Gauss y aplícalo para calcular el campo eléctrico creado por una distribución esférica superficial de carga σ y radio R, en cualquier punto del espacio (justifica la respuesta).

Solución

"El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada *S* es igual a la carga total encerrada dentro de *S* dividido por ε_0".

(1 punto)

Vamos a calcular el campo eléctrico en dos zonas distintas: en el interior de la distribución y en el exterior.

a) Interior. Consideremos una superficie esférica cerrada, S_{int} de radio $r<R$. Por el teorema de Gauss, el flujo que la atraviesa es cero, por no poseer carga encerrada. De modo que, como el área de la superficie no es cero, deberá ser cero el campo.

b) Exterior. Las superficies equipotenciales son superficies esféricas concéntricas con la corteza esférica cargada, por lo que el campo eléctrico tendrá una dirección radial en torno a la corteza. Se toma por tanto una superficie esférica gaussiana S_{ext} de radio $r>R$, y se calcula, en primer lugar el flujo a su través:

$$\Phi = \int_{S_{ext}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{ext}} EdS = ES_{ext}$$

La sencilla resolución de esta integral es posible por ser el campo siempre paralelo a la superficie en todo punto de la superficie esférica ($\vec{E}\cdot d\vec{S} = EdS$), y por valer el campo lo mismo en todos los puntos de esta superficie. De este modo, el flujo es también muy sencillo de calcular, y vale $E\cdot 4\pi r^2$.

Por otra parte, podemos calcular el flujo aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

Igualando ambos, y despejando *E* queda:

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Puede observarse que, como la carga total es $Q = \sigma 4\pi R^2$, en el exterior el campo eléctrico valdrá:

$$E = \frac{\frac{Q}{4\pi R^2}R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

que es equivalente a suponer que toda la carga de la corteza esférica está concentrada en el centro de ésta.

(1,5 puntos)

P2.- Una esfera conductora, de radio R_1 y carga *Q* se une mediante un hilo conductor, de capacidad despreciable, a otra esfera de radio R_2 ($R_2<R_1$), inicialmente descargada. Suponiendo que las esferas están lo suficientemente alejadas entre sí para que los fenómenos de influencia sean despreciables, calcula:

a) Cargas Q_1 y Q_2 de cada esfera.

b) Potencial de cada esfera.

c) Densidad superficial de carga en cada esfera.

d) ¿Qué ocurre respecto a la carga y el potencial de ambas esferas si $R_2>>R_1$ (considerar que R_2 tiende a ∞) (Justifica la respuesta)

Solución

a) Al unir las dos esferas conductoras mediante un hilo conductor la carga total *Q* se distribuye entre ambas de tal forma que las dos esferas sean equipotenciales, por lo que podemos escribir las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} Q = Q_1 + Q_2 \\ V = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{array}\right] \Rightarrow Q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2}, \quad Q_2 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}$$

ya que la carga total se conserva y el potencial de cada esfera es el debido a su distribución superficial esférica de carga.

(1 punto)

b) El potencial electrostático de ambos conductores será el mismo, por lo que se puede calcular en cualquiera de ellos

$$V = V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

(0.5 puntos)

c) La densidad superficial de carga es:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{QR_1}{4\pi R_1^2 (R_1 + R_2)} = \frac{Q}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)}$$

(0.5 puntos)

d) Si $R_2 >> R_1$ el conductor de radio R_2 tendrá la totalidad de la carga, mientras que el de radio R_1 quedará descargado, como puede observarse a partir del resultado del apartado a):

$$lim_{R_2 \to \infty} Q_1 = lim_{R_2 \to \infty} \left(\frac{QR_1}{R_1 + R_2} \right) = 0$$

$$lim_{R_2 \to \infty} Q_2 = lim_{R_2 \to \infty} \left(\frac{QR_2}{R_1 + R_2} \right) = Q$$

Por otro lado el potencial de ambos conductores se anula:

$$lim_{R_2 \to \infty} V = lim_{R_2 \to \infty} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)} \right) = 0$$

(0.5 puntos)

P3.-Dos conductores cilíndricos están hechos del mismo material (resistividad ρ) y la misma longitud **L**, y **la relación entre las secciones** de ambos conductores es $\mathbf{S_1/S_2 = 2}$. Calcula:

a) La **relación entre las resistencias** de ambos conductores $\mathbf{R_1/R_2}$**.**

Se conectan **en paralelo**. Si la intensidad total del conjunto es **I=3 A**. Calcular:

b) La **relación entre las intensidades** de corriente que circulan por ambos conductores, $\mathbf{I_1/I_2}$.
c) La **intensidad** que circula por cada conductor, $\mathbf{I_1}$ **y** $\mathbf{I_2}$.

Se conectan **en serie**, y se aplica un voltaje **V=10 V** al conjunto. Calcular:

d) La **relación entre los voltajes** entre los terminales de ambos conductores, $\mathbf{V_1/V_2}$.
e) El **voltaje** en los terminales de cada conductor $\mathbf{V_1}$ **y** $\mathbf{V_2}$.

a) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho L/_{S_1}}{\rho L/_{S_2}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$ $\quad\quad R_2 = 2R_1$

(0.5 puntos)

b) En paralelo las dos resistencias están a la misma d.d.p.

$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad\quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = 2$ (0.5 puntos)

$I_1 + I_2 = 3 \;\rightarrow\; 2I_2 + I_2 = 3$ (0.5 puntos)

c)

$I_2 = 1A; \quad I_1 = 2A$

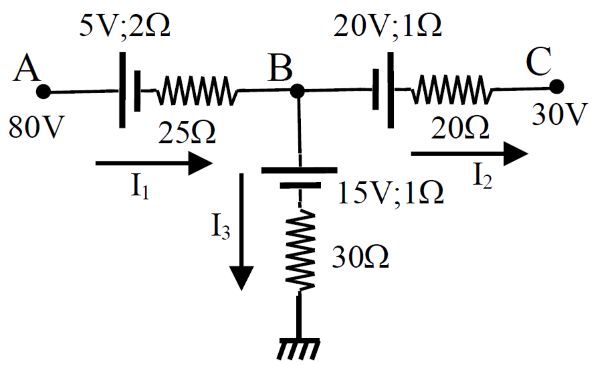
d) e)

Ahora circula la misma intensidad por las dos resistencias

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{IR_1}{IR_2} = \frac{1}{2}$ (0.5 puntos)

$V_1 + V_2 = 10 \;\rightarrow\; V_1 + \; 2V_1 = 10 \quad\quad V_1 = 3{,}33V; \quad V_2 = 6{,}66V$ (0.5 puntos)

P4.-Dado el circuito de la figura, calcula:
a) Las intensidades que circulan por cada una de las ramas utilizando las leyes de Kirchhoff.
b) La resistencia equivalente entre B y C.
c) El generador equivalente de Thevenin entre B y C, y la intensidad de corriente que circularía por una resistencia de 100 Ω que conectásemos entre B y C.



a) Aplicamos al circuito las leyes de Kirchhoff.

Ley de los nudos:

$$\Sigma I = 0$$
$$I_1 = I_2 + I_3$$

Ley de las mallas

$$V_A - V_T = 80 = 5 + 2I_1 + 25I_1 + 15 + 1I_3 + 30I_3$$
$$V_C - V_T = 30 = 20 - 20I_2 - 1I_2 + 15 + 30I_3 + 1I_3$$

Resumiendo, tenemos las ecuaciones:

$$60 = 27I_1 + 31I_3$$
$$-5 = -21I_2 + 31I_3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$I_1 = 1.594\ A \quad I_2 = 1{,}046\ A \quad I_3 = 0{,}547\ \ A$ (1 punto)

b) Resistencia equivalente entre B y C, observamos que las tres ramas están entre esos dos puntos en paralelo, luego:

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{27} + \frac{1}{31} + \frac{1}{21}$

$R_{eq} = 8.55\ \Omega$ (0.5 puntos)

c) Generador equivalente de Thèvenin entre B y C:

$$R_{Th} = R_{eqBC} = 8.55\Omega$$

$$\varepsilon_T = V_B - V_C = 21I_2 - 20 = 1.97\ \mathrm{V}$$

El polo positivo del generador equivalente de Thevenin conectado al punto B. (0.5 puntos)

Si conectamos una resistencia de 100W entre B y C, la intensidad que circula por ella, utilizando Thèvenin es:

$I = \frac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma R} = \frac{1.97}{100+8.55} = 0{,}018\ A$ (0.5 puntos)