

- 1.1 Introducción
- 1.2 Carga eléctrica
- 1.3 Fuerzas electrostáticas. Ley de Coulomb
- 1.4 Campo eléctrico. Líneas de campo eléctrico
- 1.5 Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss
- 1.6 Trabajo de las fuerzas del campo eléctrico
- 1.7 Energía potencial electrostática. Potencial eléctrico. Superficies equipotenciales
- 1.8 Aplicaciones
- 1.9 Problemas



### Objetivos

- Saber calcular el campo eléctrico y el potencial eléctrico creados por cargas puntuales y distribuciones simétricas de carga.
- Adquirir los conceptos de energía potencial electrostática y de potencial eléctrico.

## 1.1 Introducción

La interacción electromagnética, el electromagnetismo, se encuentra presente en una amplia gama de fenómenos de distinto ámbito que abarcan desde las interacciones electrónicas en los átomos y moléculas, es decir de la constitución misma de la materia, a otras en las que se fundamenta la mayor parte de la tecnología actual: alumbrado, motores, telecomunicación, informática, etc.

Tradicionalmente, se ha dividido el electromagnetismo en dos partes separadas asociadas a sus efectos eléctricos y magnéticos. De hecho, Hans Christian Oersted, uno de los descubridores de las relaciones entre ambos efectos, era profesor de “Electricidad, Galvanismo y Magnetismo”, y hasta la constatación de esta relación, en la segunda mitad del siglo XIX, dichos efectos fueron estudiados de modo separado. En la actualidad, conocemos que ambos

fenómenos son consecuencia de la misma característica de la materia que se denomina **carga eléctrica**.

Este capítulo tiene por objeto el estudio de las cargas eléctricas en reposo, la parte del electromagnetismo que se denomina **electrostática**. En los capítulos 6, 7, 8 y 9 se estudiarán los efectos magnéticos de las cargas eléctricas en movimiento.

## 1.2 Carga eléctrica

Comenzaremos este tema observando una experiencia sencilla en la que se ponen de manifiesto algunas características de la magnitud física carga eléctrica. Consideremos una bola de plástico colgada con un hilo aislante y frotada con piel; frotamos con piel otra pieza de plástico con forma de barra. Si acercamos la barra a la bola observamos que la bola y la barra se repelen. Pero si sustituimos la bola de plástico por otra de vidrio y la frotamos con seda, al acercar la barra de plástico frotada con piel vemos que la bola y la barra se atraen.

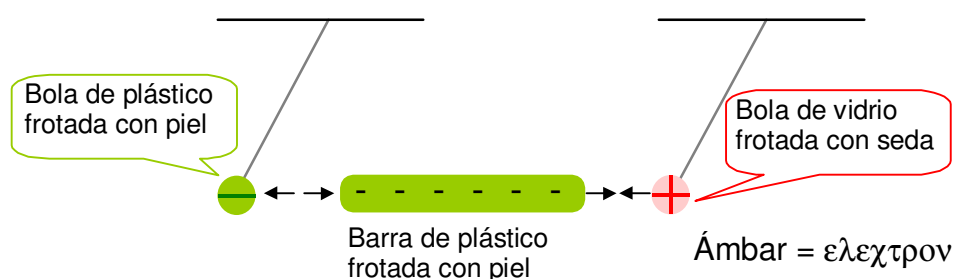


Figura 1-1. Fuerzas eléctricas de atracción y repulsión

Antiguamente, los griegos habían hecho experiencias similares pero con piezas de ámbar, pieles y tejidos en lugar de plástico. De ahí que el origen de la palabra electricidad es la palabra ámbar que en griego se escribe ελεχτρον (electrón).

### Justificación: Modelo atómico. Cargas negativas y positivas

La explicación de estas fuerzas o interacciones aparecidas en los sistemas descritos se basa en la existencia de una propiedad de la materia denominada carga eléctrica. Bastan dos tipos de carga distintos, que se denominan positiva y negativa, para entender los fenómenos de atracción y repulsión mostrados en la Figura 1-1.

Actualmente se sabe que la materia está formada por átomos. Los átomos están constituidos por un núcleo, que contiene protones con carga positiva y neutrones sin carga eléctrica. Este núcleo está rodeado por una distribución de electrones con carga negativa. La cantidad de carga de un electrón y de un protón es la misma, pero de distinto tipo. Entre cargas del mismo tipo aparecen fuerzas de repulsión y entre cargas de distinto tipo, fuerzas de atracción.

La característica o propiedad de la materia que reside en electrones y protones se denomina carga eléctrica,  $Q$ , y es una propiedad fundamental de la materia, al igual que lo es la masa. Se dice que un cuerpo está cargado positi-

vamente si tiene menor número de electrones que de protones, y cargado negativamente si es al contrario.

Los átomos, en principio, tienen tantos protones como electrones (son neutros), por lo que tienen la misma cantidad de carga de ambos tipos, siendo nula su carga neta (Figura 1-2).

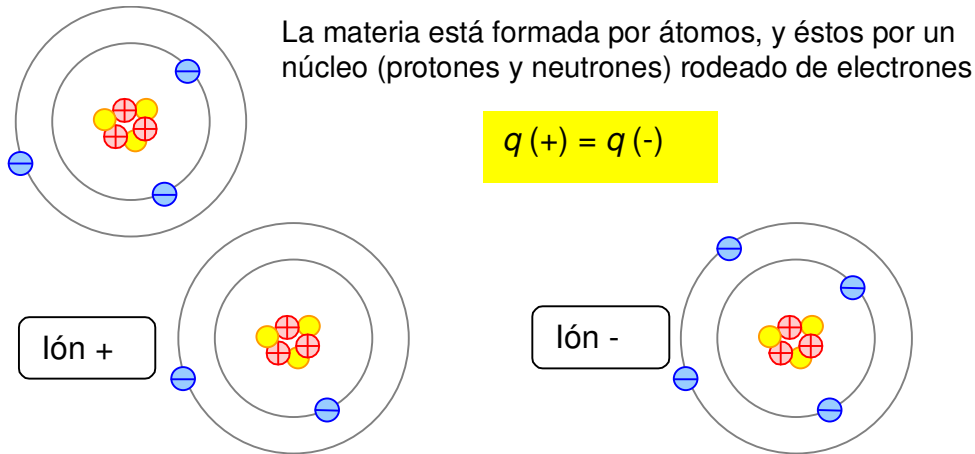


Figura 1-2. Modelo atómico e iones cargados positiva y negativamente

Cuando se frota el plástico con piel se transfieren electrones de la piel al plástico, quedando el plástico con un exceso de electrones, cargado negativamente, y la piel con falta de electrones, cargada positivamente. Mientras que cuando se frota vidrio con seda, pasan electrones del vidrio a la seda, quedando el vidrio cargado positivamente y la seda negativamente. En estas transferencias de carga de un cuerpo a otro, siempre son los electrones los que pasan de un cuerpo a otro, y nunca los protones, ya que están en el núcleo y es muy difícil moverlos de allí.

Un átomo con déficit de electrones se denomina ión positivo y con exceso de electrones ión negativo.

La carga eléctrica mínima que puede tener un cuerpo equivale a la carga de un electrón en valor absoluto, se le denomina carga elemental, y se representa por  $e$ .

### Propiedades: cuantización y conservación

La carga eléctrica que posee un cuerpo siempre es un múltiplo entero de la carga elemental  $e$ , es decir, la carga está cuantizada, no pudiendo obtenerse partes más pequeñas de esta cantidad.

Por otra parte, la carga no se crea ni se destruye, puede fluir, cambiar de posición, pero no puede desaparecer. Este hecho constituye el principio de conservación de la carga: la carga total en un sistema aislado permanece constante.

La unidad de la carga en el S.I. es el **culombio** (C), que se define en relación al amperio, pues el amperio es la unidad de la magnitud fundamental, intensidad de corriente eléctrica. Un culombio es la cantidad de carga que atraviesa la sección transversal de un conductor, por el que circula una intensidad de corriente de un amperio, durante un segundo:  $1 \text{ C} = 1 \text{ A } 1 \text{ s}$ , (la intensidad se definirá en el capítulo 3, y el amperio en el capítulo 6). La ecuación de dimensiones de la carga es:  $[Q] = I T$

La carga elemental, vale:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

### 1.3 Fuerzas electrostáticas. Ley de Coulomb

Las fuerzas atractivas y repulsivas de origen eléctrico que aparecen entre cuerpos cargados son generalmente de mucha mayor intensidad que las fuerzas de atracción gravitatoria entre ellos.

El primero en medir las fuerzas electrostáticas fue Coulomb (1785), utilizando una balanza de torsión.

Dos cargas eléctricas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , en reposo, separadas una distancia  $r$  en el vacío, ejercen entre sí una fuerza cuyo módulo es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, cuya dirección es la de la recta que las une y es repulsiva si son del mismo signo y atractiva si son de signo contrario.

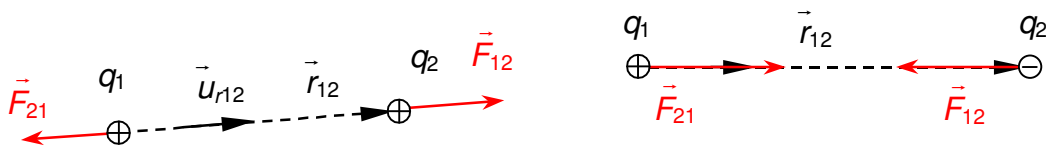


Figura 1-3. Fuerzas entre cargas del mismo signo y entre cargas de signo contrario

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{r12}$$

Ecuación 1-1

En esta relación,  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza que la carga  $q_1$  ejerce sobre  $q_2$ ,  $\vec{F}_{21}$  es la fuerza que la carga  $q_2$  ejerce sobre  $q_1$ ,  $\vec{r}_{12}$  es el vector dirigido desde  $q_1$  hacia  $q_2$ , y su unitario  $\vec{u}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ . La constante  $k$  vale en el vacío  $k = 8,99 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ , aunque es más frecuente encontrarla en función de otra constante  $\epsilon_0$ ,

$$k = 1/4\pi\epsilon_0$$

donde  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ , es la **permitividad o constante dieléctrica del vacío**.

Ejercicio:

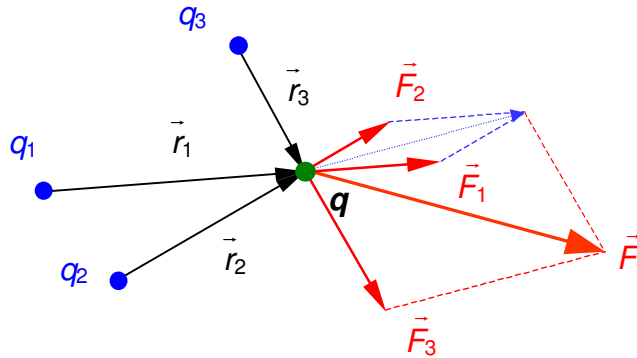
Dos cargas puntuales positivas de  $1 \mu\text{C}$  situadas sobre el eje  $OX$  de un sistema de coordenadas cartesiano, están separadas una distancia  $r = 1 \text{ cm}$ . Determina las fuerzas que se ejercen.

#### Principio de superposición de fuerzas electrostáticas

La fuerza total producida por varias cargas a la vez sobre otra, es la suma vectorial de las fuerzas que aparecerían si actuaran por separado. Este he-

cho se denomina principio de superposición, y se aplica también a otros casos de superposición de fuerzas.

Por tanto, si se tiene una distribución de cargas  $q_i$  actuando sobre una carga  $q$ , la fuerza total sobre  $q$  es la suma vectorial de las fuerzas que ejerce cada una de ellas sobre dicha carga.



$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

Figura 1-4. Principio de superposición

Ecuación 1-2

## 1.4 Campo eléctrico

Dada una carga eléctrica  $q$ , el espacio que la rodea está modificado por su presencia, y se dice que en dicha región hay un **campo eléctrico**. Si en un punto de dicho campo colocamos una segunda carga  $q_0$ , se define el campo eléctrico en dicho punto como la fuerza que actuaría sobre  $q_0$  dividida por la carga  $q_0$ . Es decir, el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto del espacio es la *fuerza eléctrica que actuaría sobre la unidad de carga positiva situada en dicho punto*.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

Ecuación 1-3

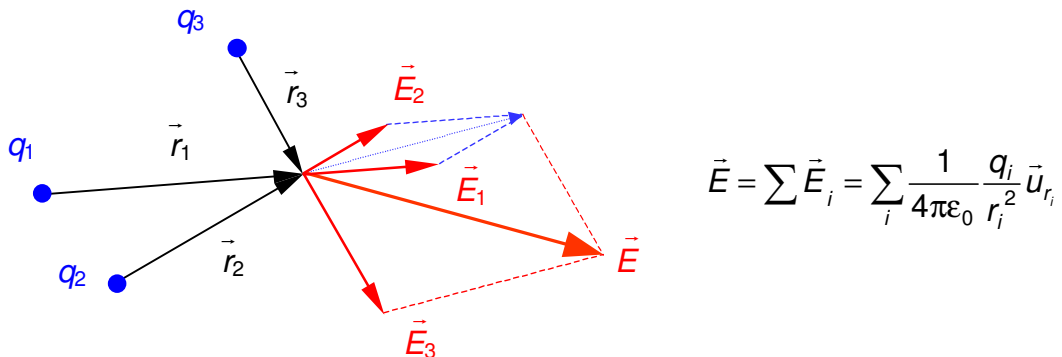
La unidad de campo eléctrico es el N/C, aunque veremos que N/C es equivalente a V/m (voltio/metro). Las dimensiones son  $[E] = M L T^{-3} I^{-1}$

Se ha descrito el campo eléctrico como un efecto producido por las cargas eléctricas en reposo, pero más allá de un contexto puramente electrostático, el campo eléctrico es una magnitud presente en otros sistemas o entidades más complejos como corrientes eléctricas, nubes tormentosas, moléculas, ondas electromagnéticas, etc., en los que también existe un efecto cuantificado por esta magnitud.

Campos eléctricos en la Naturaleza (estimación)	$E$ (N/C)
En los cables domésticos	$10^{-2}$
En las ondas de radio	$10^{-1}$
En la atmósfera	$10^2$
En la luz solar	$10^3$
Bajo una nube tormentosa	$10^4$
En un tubo de rayos X	$10^6$
En el átomo de hidrógeno	$6 \cdot 10^{11}$

## Campo eléctrico creado por $n$ cargas puntuales

De manera similar a la superposición de fuerzas electrostáticas, el campo eléctrico en un punto es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas en dicho punto.



$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

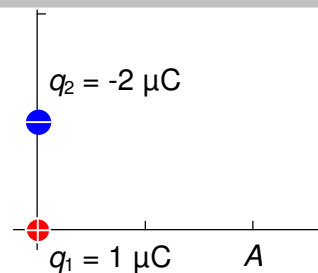
Figura 1-5. Principio de superposición

Ecuación 1-4

### Ejemplo 1-1

Dadas las cargas puntuales de la figura, calcula:

- El campo eléctrico resultante en el punto  $A(2,0)$  m. Aplica el principio de superposición dibujando en el gráfico los campos que ejerce cada carga por separado.
- La fuerza que actuaría sobre una carga puntual negativa de  $-3$  nC en  $A$ .



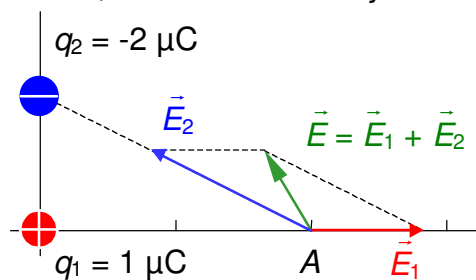
#### Solución

- El campo producido por una carga puntual  $q$  en un punto cuya posición respecto de la carga viene dada por el vector  $\vec{r}$  es  $\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$ , siendo  $\vec{u}_r$  el vector unitario de  $\vec{r}$ .

$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} = k \frac{q_1}{r_1^2} \vec{i} = \frac{9000}{4} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} = \frac{-18000}{5} \left( \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{5}} \right) = \frac{3600}{\sqrt{5}} (-2\vec{i} + \vec{j}) \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Sumando ambos vectores,  $\vec{E} = -970\vec{i} + 1610\vec{j}$  N



b) Si en A se sitúa una carga de  $-3 \text{ nC}$ , la fuerza sobre ella vale:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -3(-970\vec{i} + 1610\vec{j}) = 2910\vec{i} - 4830\vec{j} \text{ nN}$$

Obsérvese que al ser una carga negativa el vector fuerza tiene sentido contrario al campo.

### Líneas de campo eléctrico

Se llaman líneas de campo eléctrico a aquellas líneas que, en cada uno de sus puntos, son tangentes al vector campo eléctrico. El campo eléctrico puede por tanto representarse mediante estas líneas, que indicarán la dirección del campo en cualquier punto.

El campo eléctrico creado por una carga puntual es un campo central (el vector campo siempre tiene dirección radial), por lo que sus líneas de campo serán rectas que se cortan en el punto donde está situada la carga.

Las líneas de campo debidas a varias cargas puntuales son líneas curvas, cuya forma depende de los valores de las cargas y de sus posiciones.

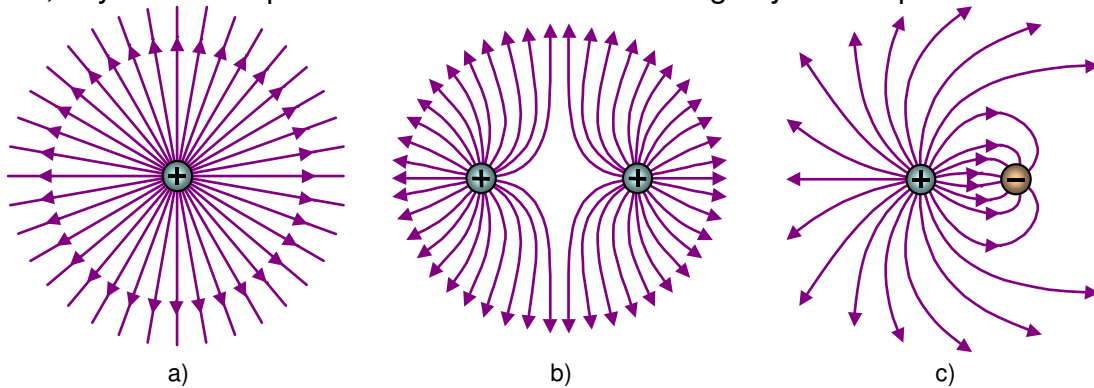
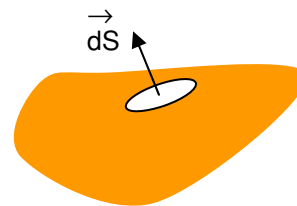


Figura 1-6. a) Líneas de campo eléctrico cerca de una carga puntual positiva. b) Líneas de campo eléctrico cerca de dos cargas puntuales positivas iguales. c) Líneas de campo eléctrico cerca de una carga puntual positiva  $2q$  y negativa  $-q$

### 1.5 Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss

Dada una superficie cerrada  $S$ , en cualquier punto de dicha superficie podemos definir el vector superficie. Para ello, debemos considerar un entorno de superficie alrededor de dicho punto ( $dS$ ). El vector superficie es un vector perpendicular a ella, sentido hacia el exterior del volumen delimitado por la superficie, y módulo la superficie del entorno considerado,  $dS$ . Para que esta definición sea consistente, el elemento de superficie debe ser una pequeña superficie plana, y por ello, para una superficie de forma cualquiera, es necesario dividirla en pequeñas superficies infinitesimales.



El flujo elemental ( $d\phi$ ) de un campo eléctrico a través de una superficie elemental  $dS$  se define como el producto escalar de los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$ :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

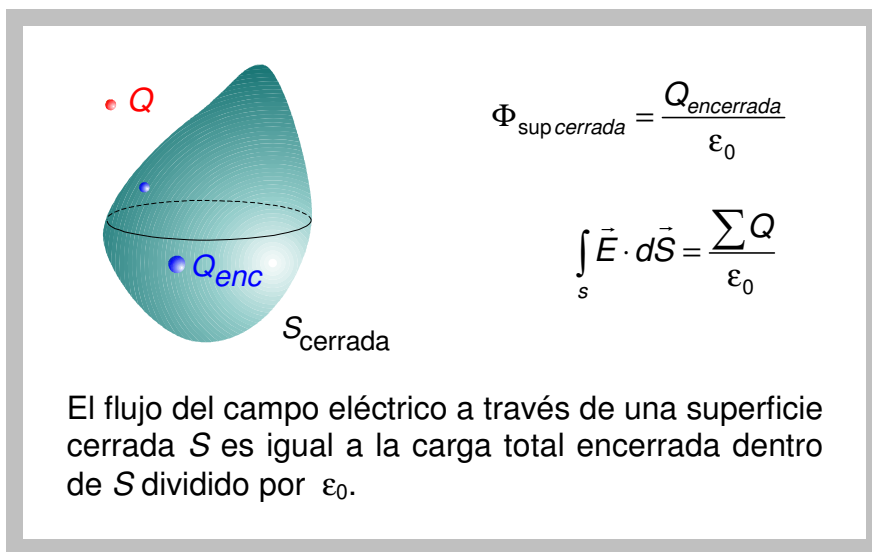
Si extendemos el cálculo del flujo elemental a toda la superficie cerrada, tendremos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie S:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Las dimensiones del flujo eléctrico son

$$[\phi] = [E][S] = ML^3T^{-3}I^{-1} \quad \text{y se mide en V}\cdot\text{m ó N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

El teorema de Gauss dice que:



$\Phi_{\text{sup cerrada}} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$

$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada dentro de S dividido por  $\epsilon_0$ .

Es importante subrayar que el flujo a través de la superficie cerrada sólo depende de las cargas encerradas por esta superficie, no depende de las que estén fuera.

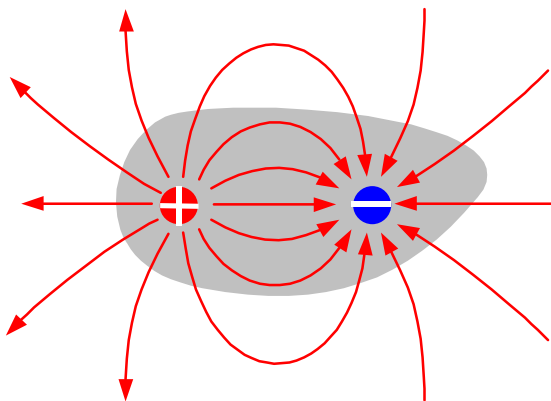


Figura 1-7. Una superficie cerrada que encierra un dipolo eléctrico es atravesada por un flujo neto cero. Gráficamente, el número de líneas que salen de la superficie es el mismo que las que entran

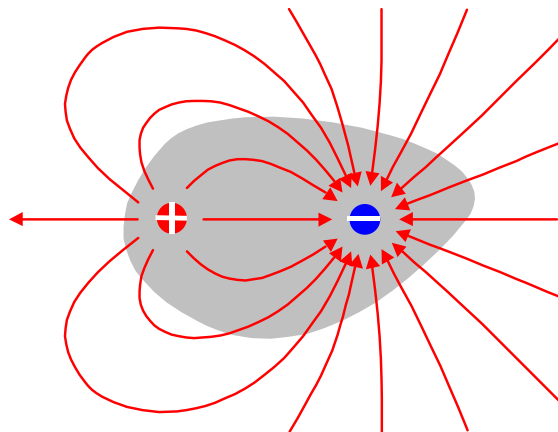


Figura 1-8. Una superficie cerrada que encierra un sistema de dos cargas q y -2q es atravesada por un flujo neto negativo. Gráficamente, el número de líneas que salen de la superficie es menor que las que entran



El teorema de Gauss es útil para hallar el campo eléctrico de algunas distribuciones de carga que, en general, presenten una simetría especial en la distribución de la carga (esferas y cilindros infinitos cargados uniformemente, planos infinitos cargados, etc.), de tal forma que resulta más fácil hallar el flujo y despejar el campo eléctrico, que hallarlo directamente a partir de la ley de Coulomb. Para ello, es fundamental buscar una superficie imaginaria tal que el campo eléctrico sea paralelo o perpendicular al vector superficie en cada punto, y también que el módulo del campo eléctrico sea constante en todos los puntos de dicha superficie imaginaria. Si hacemos esto, el cálculo del flujo es inmediato, ya que

- Si  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son perpendiculares en todos los puntos de S

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos en todos los puntos de S

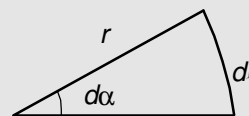
$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E \int_S dS = ES$$



### Teorema de Gauss. Demostración

Para demostrar el teorema de Gauss se va a definir una magnitud adecuada para la medida de ángulos en tres dimensiones; se trata del **ángulo sólido**. Cuando observamos la Luna, por ejemplo, nuestra vista ha de abarcar un ángulo tridimensional; a este ángulo se le llama ángulo sólido, para distinguirlo del ángulo plano. De la misma manera que el ángulo plano es la relación entre la longitud de un arco y su radio, y se mide en radianes,

$$d\alpha = \frac{d\ell}{r}$$



el ángulo sólido es la relación entre una porción de superficie esférica y su radio al cuadrado,

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

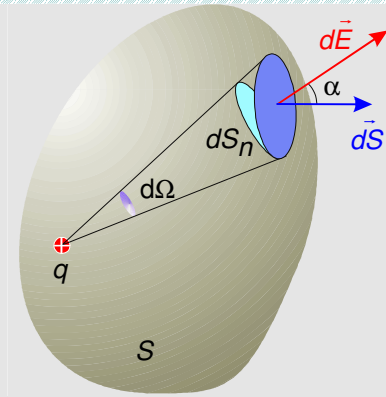
y se mide en estereoradianes.

Así como la totalidad del ángulo plano subtendido por una circunferencia es  $2\pi$  radianes, la totalidad del ángulo subtendido por una esfera es  $4\pi$  estereoradianes.

En la figura, hay una carga puntual positiva en el interior de una superficie cerrada, y un elemento de superficie  $d\vec{S}$  que no tiene porqué ser perpendicular al campo eléctrico. El flujo eléctrico que atraviesa este elemento de superficie vale:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \cos \alpha = EdS_n$$

siendo  $dS_n$  la componente de  $d\vec{S}$  paralela al campo eléctrico.



$$d\Phi = EdS_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\Omega r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

El flujo que atraviesa a una superficie finita valdrá entonces:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega$$

Obsérvese que las  $r^2$  se cancelan, y que como consecuencia, el flujo ¡no depende de la distancia!, es decir del tamaño de la superficie. Este hecho está relacionado con que el campo es radial y disminuye con el cuadrado de la distancia (a un campo así, se le denomina, en ocasiones, campo gaussiano)

El ángulo sólido subtendido por la superficie S cerrada hay que extenderlo a la totalidad de la superficie, ya que la carga está dentro, y por lo tanto vale  $4\pi$ . Sustituyendo, se obtiene:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Que es el teorema de Gauss.

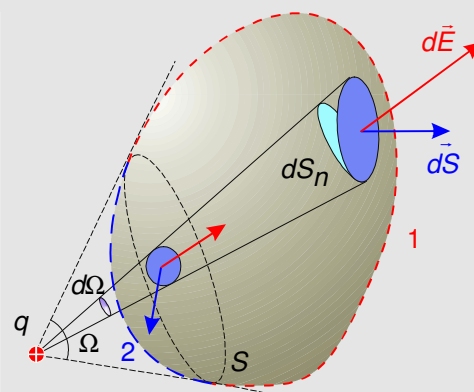
Si la carga hubiera estado fuera de la superficie, se puede descomponer la superficie en dos zonas: una zona 1 donde el flujo es positivo (saliente), y otra zona 2, donde el flujo es entrante. El flujo total se obtendrá sumando estos dos:

$$\Phi = \int_1 EdS_n + \int_2 EdS_n =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = 0$$

se obtiene cero porque al quedar la carga fuera, se anulan los flujos por tener distinto signo. Si la carga hubiera estado dentro, sólo habría flujo saliente.

Si en vez de una carga puntual, se tiene una carga distribuida, se llegará a la misma conclusión considerando las partículas que lo formen y aplicando el principio de superposición.



## Aplicaciones del teorema de Gauss

Se van a tratar a continuación algunos casos que, por su simetría, permiten utilizar el teorema de Gauss para el cálculo del campo eléctrico.

### a) Campo eléctrico creado por un plano infinito cargado con densidad superficial de carga $\sigma$

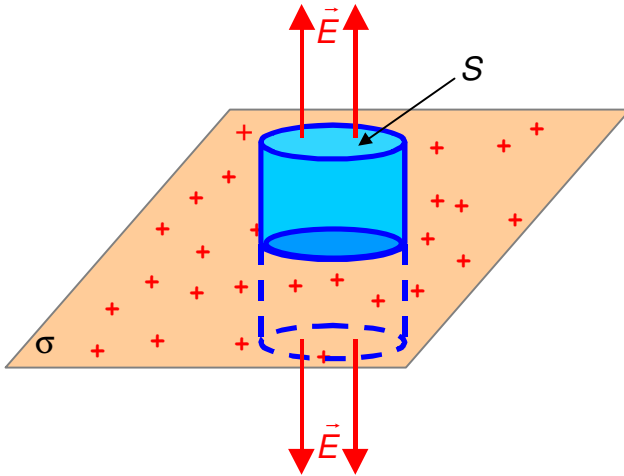


Figura 1-9. Plano infinito cargado

Consideremos una superficie cerrada (en adelante se denominará superficie gaussiana), que utilizamos para aplicar el teorema de Gauss. La elección de esta superficie nos debe permitir calcular fácilmente el flujo a su través. Las superficies equipotenciales en las cercanías del plano son planos paralelos a éste, por lo que las líneas de  $\vec{E}$ , serán perpendiculares al plano, y por tratarse de cargas positivas, dirigidas hacia fuera. Por ser un plano infinito, no existe ningún efecto en los bordes, y las líneas de campo serán todas paralelas. Estas consideraciones nos llevan a escoger una superficie cilíndrica con sus bases paralelas al plano como la mostrada en la Figura 1-9. De este modo, las líneas de campo serán perpendiculares a las bases y tangentes a la superficie lateral. Aplicando el teorema de Gauss:

donde S es el área de la base del cilindro.

$$\Phi_{\text{neto}} = \int_{S_{\text{cerrada}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

### b) Campo eléctrico creado por una línea infinita cargada con densidad lineal de carga $\lambda$

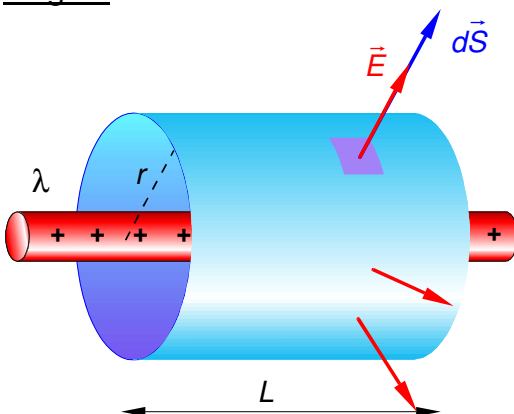


Figura 1-10. Superficie cilíndrica gaussiana de radio  $r$  coaxial con una distribución lineal de carga

Las superficies equipotenciales en las cercanías de la línea son superficies cilíndricas coaxiales con ésta, por lo que el campo eléctrico tendrá una dirección radial en torno a la línea. Por lo tanto, se toma como superficie gaussiana un cilindro de radio  $r$  coaxial con la distribución lineal de carga. De este modo, las líneas de campo cortarán perpendicularmente a la superficie lateral de la superficie cilíndrica, y serán tangentes a las dos bases del cilindro, obteniéndose:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{Lat} E dS = ES_{Lat}$$

por ser el campo paralelo al vector superficie en todo punto, y por ser el módulo del campo uniforme en toda la superficie cilíndrica. De este modo, el flujo es

igual al producto del campo  $E$  por la superficie lateral del cilindro de longitud  $L$ :  
 $ES_{Lat} = E \cdot 2\pi rL$ .

Lo dicho anteriormente es cierto si se supone la distribución lineal infinita; de lo contrario habría que considerar el efecto de los bordes, que complicaría el cálculo del flujo.

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Igualando ambos, y despejando  $E$ , queda:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

### c) Campo eléctrico creado por una distribución esférica superficial de carga $\sigma$

Vamos a calcular el campo eléctrico en dos zonas distintas: en el interior de la distribución y en el exterior.

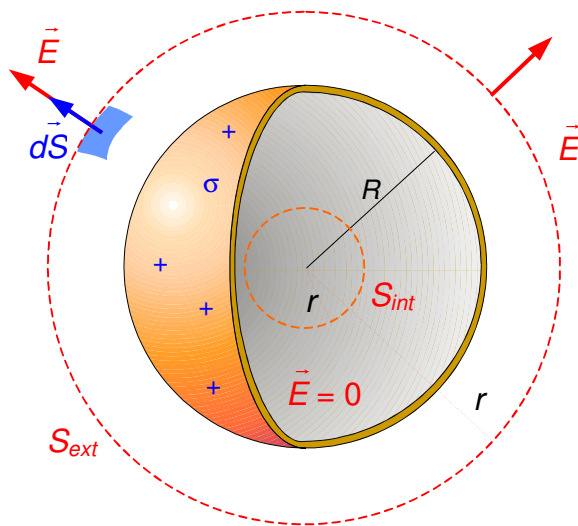


Figura 1-11. Corteza esférica cargada

a) Interior. Consideremos una superficie esférica cerrada,  $S_{int}$  de radio  $r < R$ . Por el teorema de Gauss, el flujo que la atraviesa es cero, por no poseer carga encerrada. De modo que, como el área de la superficie no es cero, deberá ser cero el campo.

b) Exterior. Las superficies equipotenciales son superficies esféricas concéntricas con la corteza

esférica cargada, por lo que el campo eléctrico tendrá una dirección radial en torno a la corteza. Se toma por tanto una superficie esférica gaussiana  $S_{ext}$  de radio  $r > R$ , y se calcula, en primer lugar el flujo a su través:

$$\Phi = \int_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{ext}} E dS = ES_{ext}$$

La sencilla resolución de esta integral es posible por ser el campo siempre paralelo a la superficie en todo punto de la superficie esférica ( $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ ), y por valer el campo lo mismo en todos los puntos de esta superficie. De este modo, el flujo es también muy sencillo de calcular, y vale  $E \cdot 4\pi r^2$ .

Por otra parte, podemos calcular el flujo aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

Igualando ambos, y despejando  $E$  queda:

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Puede observarse que, como la carga total es  $Q = \sigma 4\pi R^2$ , en el exterior el campo eléctrico valdrá:

$$E = \frac{\frac{Q}{4\pi R^2} R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

que es equivalente a suponer que toda la carga de la corteza esférica está concentrada en el centro de ésta.

### 1.6 Trabajo de las fuerzas del campo eléctrico.

Consideremos el campo eléctrico creado por una carga puntual  $Q$ . En un punto  $P$  cualquiera dado por el vector de posición  $\vec{r}$ , el campo eléctrico creado por  $Q$  valdrá  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ , siendo  $\vec{u}_r$  el vector unitario con dirección radial en

$P$ . Ahora, coloquemos una segunda carga  $q$  en  $P$ , y apliquemos un pequeño desplazamiento  $d\vec{l}$  en una dirección cualquiera a la carga  $q$  allí colocada.

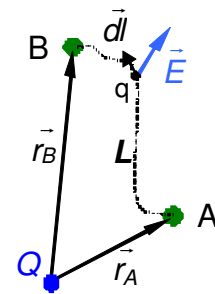
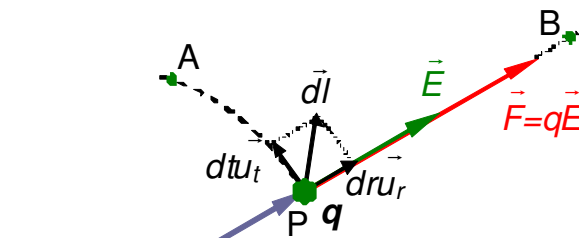
El trabajo efectuado por la fuerza del campo para mover la carga  $q$  ese  $d\vec{l}$  vendrá dado por  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Ese desplazamiento  $d\vec{l}$  podemos descomponerlo en una componente paralela al campo eléctrico y otra tangente a un arco de circunferencia centrado en  $Q$  y que pase por  $P$ , por lo que  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + dt\vec{u}_t$

Como  $\vec{E}$  es siempre perpendicular a dicho arco de circunferencia,  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_t = 0$ , por lo que:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r (dr\vec{u}_r + dt\vec{u}_t) = \frac{qQdr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para calcular el trabajo que hace la fuerza eléctrica que actúa sobre  $q$  para desplazarla desde un punto  $A$  hasta otro  $B$  a lo largo de una línea  $L$  cualquiera, tal y como se muestra en la figura, tendremos que sumar todos los trabajos hechos por la fuerza en pequeños desplazamientos como los mostrados, a lo largo de  $L$  entre  $A$  y  $B$ , y la suma total será el trabajo buscado. Como esta suma tendrá infinitos términos, se convierte en una integral, denominada integral de línea:



$$W_{AB}^L = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

$$W_{AB}^L = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Ecuación 1-5

Si ambas cargas ( $q$  y  $Q$ ) son del mismo signo, la fuerza entre ambas es repulsiva; si, además, el punto B está más alejado que A de Q ( $r_B > r_A$ ), entonces el trabajo calculado  $W_{AB}^L$  es positivo, indicativo de que el trabajo es realizado, de manera espontánea, por el campo eléctrico. Pero si las cargas tuvieran signos diferentes, o el punto final B estuviera más próximo a Q ( $r_B < r_A$ ), entonces  $W_{AB}^L$  sería negativo, siendo necesaria una fuerza exterior que, venciendo la fuerza del campo eléctrico, realizara dicho trabajo. Un trabajo negativo indica que el trabajo es hecho en contra de las fuerzas del campo.

Obviamente, el trabajo hecho por el campo entre dos puntos situados a la misma distancia de Q es nulo.

### 1.7 Energía potencial electrostática. Potencial eléctrico. Superficies equipotenciales.

Resulta muy interesante comprobar que el trabajo calculado sólo depende de las cargas  $q$  y  $Q$  y de las distancias de los puntos inicial y final ( $r_A$  y  $r_B$ ) a la carga creadora del campo. Esto significa que, aunque hubiéramos elegido otro camino  $L'$  distinto para ir desde A hasta B, el trabajo realizado por las fuerzas del campo hubiera sido el mismo; o que si nos hubiéramos desplazado en sentido contrario, desde B hasta A, el trabajo habría sido el mismo pero con signo contrario; o que si nos hubiéramos movido a lo largo de una línea cerrada, partiendo de un punto y acabando en el mismo punto, el trabajo realizado habría sido nulo.

$$W_{AB}^L = W_{AB}^{L'} = W_{AB} \quad W_{AB} = -W_{BA} \quad W_{AA} = 0$$

Los campos que tienen esta propiedad (como, por ejemplo, el campo gravitatorio), se llaman campos conservativos o campos que derivan de potencial; el nombre de campo conservativo indica que el campo es capaz de “conservar” el trabajo para “devolverlo” cuando nos movemos en sentido contrario, como hacen, por ejemplo, el campo gravitatorio o un muelle. La fuerza de rozamiento entre dos superficies, en cambio, no es conservativa, ya que independientemente del sentido en que rocesemos ambas superficies, el trabajo siempre tiene que ser hecho por algún agente externo al campo. Y el nombre de campos que derivan de potencial proviene de la consideración de una función, llamada energía potencial, que nos indica la capacidad de producir trabajo. En este tipo de campos, como es sabido, el trabajo realizado por el campo al mover una partícula entre dos puntos se puede expresar como la diferencia de energías potenciales entre los dos puntos.

Análogamente, en el caso del campo eléctrico, el trabajo para llevar una carga desde A hasta B se puede escribir como la diferencia de energía potencial de la carga  $q$  entre los puntos A y B:  $W_{AB} = U_A - U_B$ . La función  $U$  es llamada energía potencial electrostática de una carga  $q$  en un punto del campo creado por la carga  $Q$ .

Pero anteriormente hemos visto que el trabajo debido a un campo eléctrico era

$$W_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

por lo que la función

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

nos da la energía potencial electrostática en un punto situado a una distancia  $r$  de la carga creadora del campo. La constante  $C$  nos indica que infinitas funciones que difieren en una constante pueden ser tomadas como energía potencial en un punto, y ello nos permite establecer el origen de energías de forma arbitraria. Usualmente, se considera que una carga situada a una distancia muy grande de la carga productora del campo tiene energía potencial electrostática nula (en  $r=\infty$ ,  $U=0$ ), por lo que  $C=0$ , resultando

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{Ecuación 1-6}$$

Es conveniente notar que la energía potencial electrostática de una carga en un punto representa el trabajo hecho por las fuerzas del campo para llevar esa carga desde dicho punto hasta el infinito, ya que:

$$W = \int_P^{\infty} \vec{F} d\vec{l} = \int_P^{\infty} q\vec{E} d\vec{l} = \int_P^{\infty} qE dr = \int_P^{\infty} q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \left. \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_r^{\infty} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En caso de que el campo eléctrico fuera producido por un conjunto de cargas, el cálculo del trabajo y de la energía potencial electrostática se podrían calcular aplicando el principio de superposición.

### Potencial eléctrico

La energía potencial electrostática, como acabamos de ver, depende tanto de la carga o cargas creadoras del campo, como de la carga situada en él y su posición; resulta práctico obtener una función que sólo dependa del campo eléctrico, y no de la carga que situemos en él, y por eso se define el potencial electrostático ( $V$ ) en un punto de un campo eléctrico como la energía potencial electrostática que tendría una carga positiva de 1 C situada en dicho punto; es decir, es la energía potencial electrostática por unidad de carga:

$$V = \frac{U}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En esta expresión hemos admitido que el origen de potenciales es el infinito.

En caso de que tuviéramos varias cargas puntuales, el potencial en cualquier punto se podría obtener calculando la suma de los potenciales creados por cada carga por separado (principio de superposición), por lo que el resultado de la acción de  $n$  cargas sobre un punto es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i} \quad \text{Ecuación 1-7}$$

siendo  $r_i$  la distancia de la carga  $Q_i$  al punto problema.

En determinadas circunstancias es posible que queramos calcular el potencial electrostático a partir del campo eléctrico, y no de las cargas creadoras del campo; para ello podemos calcular el trabajo necesario para llevar 1 C desde un punto P del campo hasta el infinito a lo largo de una línea cualquiera:

$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} d\vec{l}$$

y la diferencia de potencial (d.d.p.) entre dos puntos A y B del campo:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} \quad \text{Ecuación 1-8}$$

En ambos casos, obviamente, dado que podemos integrar a lo largo de cualquier línea, lo más sencillo será elegir para ésta, una línea de campo, ya que entonces el producto escalar se convierte en producto de módulos:

$$\vec{E} d\vec{l} = E dl$$

Las dimensiones del potencial son:

$$[V] = [E][\ell] = ML^2T^{-3}I^{-1} \quad \text{y se mide en Voltios}$$

A partir del potencial en un punto ó de la d.d.p. entre dos puntos de un campo eléctrico, es inmediato calcular tanto la energía potencial de una carga  $q$  en un punto como el trabajo necesario para llevar una carga  $q$  desde un punto hasta otro:

$$U_P = qV_P \quad \Delta U = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$



## Superficies equipotenciales

El potencial electrostático es una magnitud escalar que representa el nivel energético de un punto del espacio, igual que la altura de un punto representa el nivel energético de ese punto dentro del campo gravitatorio, o la temperatura representa el nivel energético calórico. Obsérvese que se dice potencial de un punto, no de una carga, pues una carga adquiere energía cuando se encuentra en un punto determinado que posee un potencial determinado. De este modo, al igual que decimos que un kilogramo de masa a 8000 m tiene más energía que ese mismo kilo a 10 m, diremos que un culombio de carga posee más energía si se encuentra en un punto de mayor potencial electrostático que otro.

Al igual que en la altura (curvas de nivel) o la presión (isobaras), se construyen las superficies de nivel o superficies equipotenciales como el lugar geométrico de los puntos del espacio con el mismo potencial electrostático.

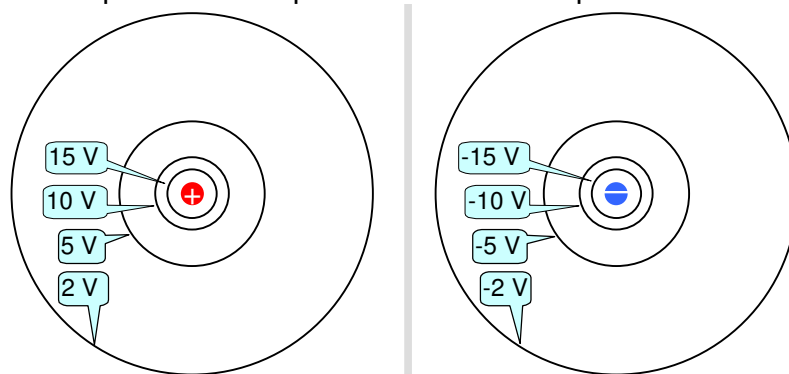


Figura 1-12. Superficies equipotenciales (curvas en el plano) en las cercanías de cargas puntuales separadas

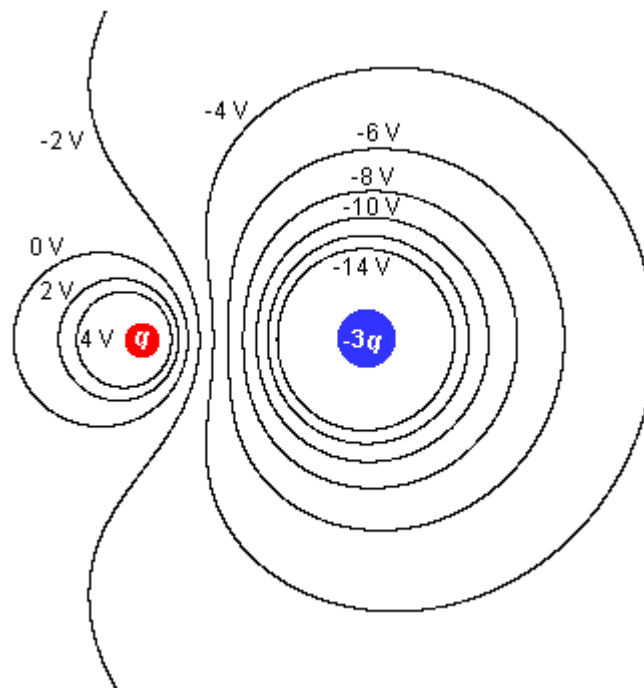


Figura 1-13. Superficies equipotenciales (curvas en el plano) en las cercanías de un sistema de cargas  $q$  y  $-3q$

Obviamente, el trabajo para mover una carga entre dos puntos cualesquiera de una superficie equipotencial es nulo, por lo que el campo eléctrico, en

cualquier punto de la superficie equipotencial, debe ser perpendicular a dicha superficie. Si no lo fuera, podríamos encontrar dos puntos tales que al llevar una carga desde uno hasta otro, el trabajo realizado por el campo no fuera nulo, contradiciendo que ambos puntos se encuentran en la misma superficie equipotencial. Así pues, en cualquier punto del campo, líneas de campo y superficies equipotenciales son perpendiculares.

Además, si abandonáramos una carga positiva en el campo, ésta se movería espontáneamente en el sentido apuntado por el campo eléctrico (trabajo positivo), por lo que se produciría un decremento de energía potencial. Así pues, el campo eléctrico nos indica el sentido en el que el potencial electrostático disminuye.

La relación entre campo eléctrico y potencial puede observarse en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, donde se muestran las superficies equipotenciales y las líneas del campo eléctrico superpuestas para el caso de un dipolo eléctrico (dos cargas iguales de distinto signo separadas una cierta distancia). Obsérvese también que las zonas donde las curvas equipotenciales están más próximas entre sí son las zonas de mayor campo eléctrico.

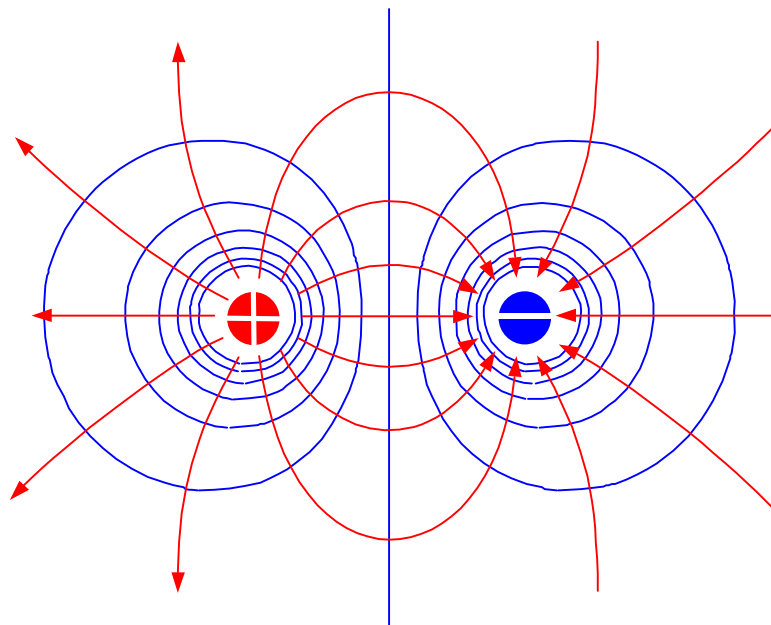


Figura 1-14. Líneas de campo (flechas) y superficies equipotenciales (las líneas cerradas son sus intersecciones con el plano) en un sistema de dos cargas iguales y de signo contrario. En cada punto las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales

### Ejemplo 1-2

Dadas las cargas puntuales del **Ejemplo 1-1**, calcula:

- El potencial eléctrico resultante en el punto  $A(2,0)$  m y en el punto  $B(4,2)$  m
- La diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$ ,  $V_A - V_B$ .

### Solución

a) El potencial producido por una carga puntual  $q$  en un punto a una distancia  $r$  es  $V = k \frac{q}{r}$ . Por lo tanto, sustituyendo y aplicando el principio de superposición:

$$V_A = k \frac{q_1}{r_{1A}} + k \frac{q_2}{r_{2A}} = 9000 \left( \frac{1}{2} + \frac{-2}{\sqrt{5}} \right) \text{ V} = -3550 \text{ V}$$

$$V_B = k \frac{q_1}{r_{1B}} + k \frac{q_2}{r_{2B}} = 9000 \left( \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{-2}{\sqrt{17}} \right) \text{ V} = -2353 \text{ V}$$

b) La diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  es:

$$V_A - V_B = -1197 \text{ V}$$

### Ejemplo 1-3

Dadas las cargas puntuales del **Ejemplo 1-2**, calcula el trabajo que debe realizar una fuerza externa para trasladar una carga puntual negativa de  $-3 \text{ nC}$  desde  $A$  hasta  $B$ .

### Solución

El trabajo realizado por las fuerzas del campo es:

$$W_{AB} = -q(V_B - V_A)$$

Por lo que las fuerzas externas realizan un trabajo  $-W_{AB}$

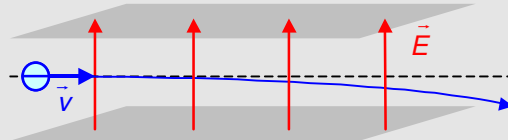
$$W_{AB \text{ Fext}} = q(V_B - V_A) = -3 (1197) = -3,59 \mu\text{J}$$

## 1.8 Aplicaciones

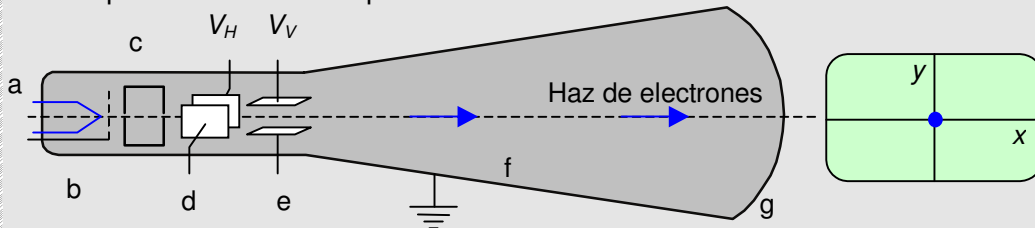


### El osciloscopio de rayos catódicos

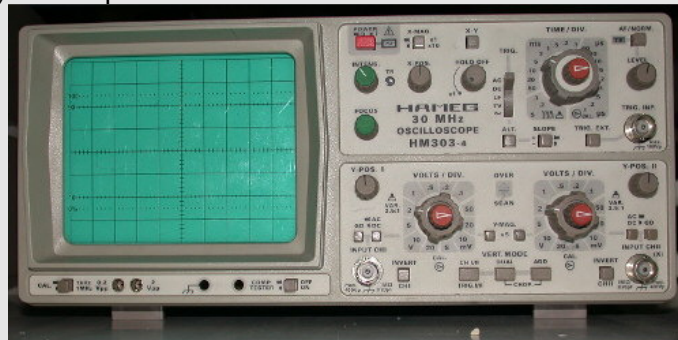
Al dirigir un haz de electrones entre dos placas conductoras entre las que se ha establecido una diferencia de potencial, y por lo tanto un campo eléctrico normal a las placas, los electrones se desvían dependiendo de su velocidad inicial y del campo eléctrico entre las placas. Basándose en este hecho, es posible dirigir un haz de electrones en una dirección determinada del espacio mediante dos juegos de placas cruzadas. Así el primer juego controlará una dirección, y el segundo otra dirección perpendicular a ésta. En este procedimiento se basa el funcionamiento de los televisores y de un instrumento de medida de múltiples aplicaciones: el osciloscopio de rayos catódicos.



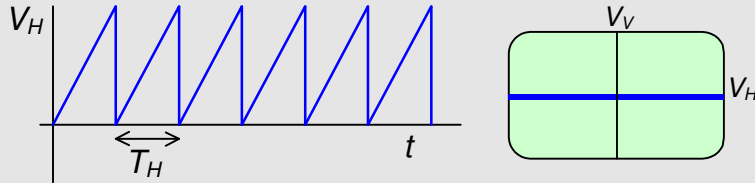
El osciloscopio de rayos catódicos permite la representación visual y medida de señales eléctricas que se manifiestan como diferencias de potencial de cualquier forma procedentes de fuentes de audio, vídeo, instrumentos médicos, datos de ordenador, etc. y en general, cualquier señal eléctrica variable procedente de cualquier circuito.



Consiste en un tubo (f) donde se ha realizado el vacío, y donde se generan electrones en un cátodo (b) calentado por una resistencia eléctrica (a) que son acelerados hacia el ánodo (c). A continuación, atraviesan dos juegos de placas deflectoras que producen campos eléctricos cruzados (d y e). De esta manera, el haz de electrones se desvía en la dirección x, por la acción del campo eléctrico producido por las placas (d) y en la dirección y por la acción de las placas (e). Finalmente, alcanzan una pantalla de fósforo fluorescente (g) donde producen un destello luminoso de corta duración.

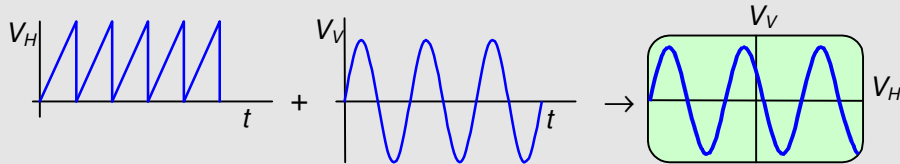


Para representar una señal eléctrica variable con el tiempo, como por ejemplo una señal senoidal, es necesario introducir una señal de barrido horizontal  $V_H$  (en el eje  $x$ , y por tanto entre las placas  $d$ ), para que así se pueda ver la variación temporal la señal vertical  $V_V$ . De este modo, sobre los electrones actúa un campo eléctrico creciente, que hace que se desvíen cada vez más, y por lo tanto, se desvíen hacia la derecha. Por este motivo, se introduce en  $(d)$  una diferencia de potencial en forma de diente de sierra. Así, si no se introduce ninguna señal en el eje vertical, observaremos una línea horizontal que barre la pantalla de izquierda a derecha.

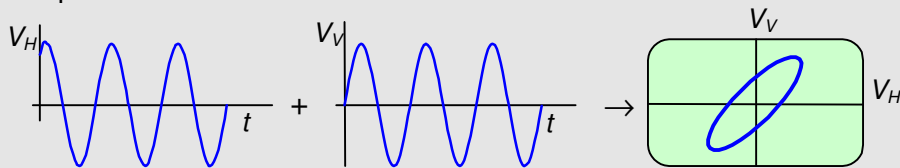


La duración del diente de sierra  $T_H$ , o su periodo, equivale al tiempo que tarda la señal en recorrer de izquierda a derecha la pantalla.

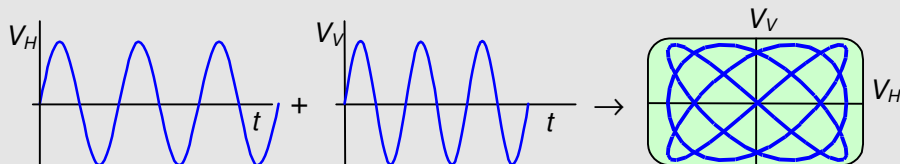
Si introducimos en las placas  $(e)$  una señal alterna sinusoidal al mismo tiempo que en  $(d)$  una señal de barrido horizontal como la descrita, los electrones serán desviados hacia la derecha por acción del campo horizontal creciente, y hacia arriba o hacia abajo por la acción del campo introducido en  $(d)$ . De este modo, obtendremos la superposición de ambas señales. Con esta técnica, puede representarse cualquier señal variable que introduzcamos en  $(e)$ . Para regular la rapidez del barrido horizontal, y por lo tanto la extensión horizontal, se regula el periodo de los dientes de sierra que normalmente está comprendido entre los segundos y los nanosegundos.



También es posible introducir dos señales independientes en  $d$  y  $e$ , con una representación  $XY$  de ambas señales, obteniéndose las denominadas figuras de Lissajous. Así, en siguiente ejemplo aparece la figura de Lissajous correspondiente a dos señales de la misma frecuencia pero desfasadas temporalmente en  $1/8$  de ciclo:



Y, en este otro ejemplo, dos señales senoidales con frecuencias distintas en la relación 3:4.





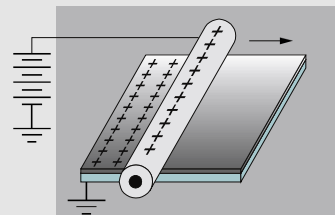
## Xerografía

La xerografía (escritura en seco) es una técnica ampliamente utilizada, que permite obtener copias en papel a partir de originales. Esta técnica fue inventada en 1938 por Chester Carlson.

El proceso está basado en una propiedad de ciertas sustancias, denominada fotoconductividad, consistente en que varían su conductividad eléctrica con la iluminación. Como ejemplo de materiales fotoconductores se puede citar el óxido de zinc y diversos compuestos de selenio. En presencia de luz la sustancia se activa como conductor, mientras que permanece como aislante en la oscuridad.

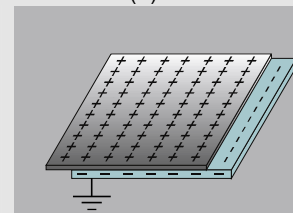
Aunque las máquinas de reproducción de xerografía son muy sofisticadas, el proceso simplificado de reproducción de un original puede resumirse en 5 etapas:

1) En primer lugar (a), una lámina recubierta de material fotoconductor, se carga eléctricamente con carga positiva en la oscuridad mediante una diferencia de potencial del orden de 1000 V entre la lámina y tierra.

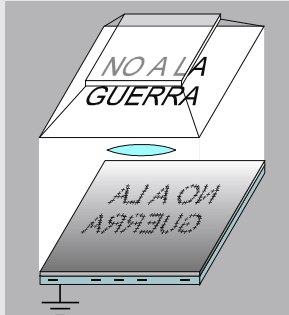


(a)

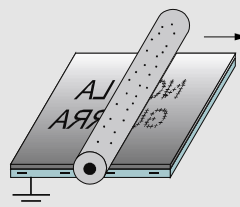
La lámina está apoyada sobre una placa metálica conductora conectada a tierra, por lo que en ésta se induce carga negativa. Las cargas de distinto signo permanecen separadas al ser aislante la lámina fotoconductor en la oscuridad.



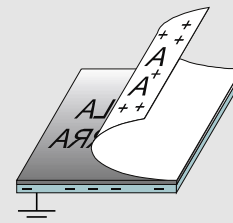
2) Posteriormente (b), se proyecta luz sobre la imagen que va a ser copiada, y mediante un sistema óptico de lentes y espejos (en la figura no aparecen), se proyecta esta imagen sobre la superficie fotoconductor. En las zonas de la superficie en que se recibe luz intensa, la carga negativa de la placa conductora neutraliza la carga positiva, y la zona se descarga, mientras que las zonas que no han recibido luz (zonas negras), permanecen cargadas al conservar la carga positiva. Donde llegue luz tenue, la carga se reduce ligeramente. De esta manera, se obtiene una distribución superficial de carga que reproduce la imagen.



(b)



(c)



(d)

3) Para convertir esta "imagen eléctrica", no visible, en imagen visible, se espolvorea un polvo (toner) constituido por partículas pigmentadas cargadas negativamente sobre la lámina fotoconductor (c). Así, se fijará el polvo sobre la "imagen eléctrica" virtual cargada positivamente, volviéndose esta "imagen eléctrica" en imagen visible.

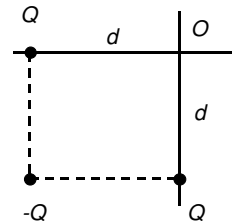
4) A continuación, se transfiere el toner al papel (d). El papel ha sido cargado positivamente para que pueda atraer a las partículas de toner, fijando éstas de modo permanente mediante calor, que funde el toner y hace que se adhiera al papel.

5) Finalmente, para poder repetir el proceso, se limpia la lámina de cualquier exceso de toner y se descarga de cualquier resto de carga eléctrica con un exceso de luz.

## 1.9 Problemas

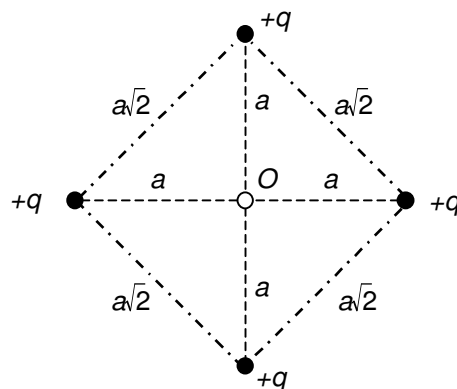
1. Dadas las tres cargas puntuales situadas como se muestra en la figura, determina la fuerza eléctrica  $\vec{F}$  que ejercen sobre una carga  $Q/2$  situada en el punto  $O$ .

$$\text{Sol: } \vec{F} = \frac{KQ^2}{2d^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (\vec{i} + \vec{j})$$



2. Dadas cuatro cargas puntuales iguales  $+q$ , situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $a\sqrt{2}$  y en reposo, hallar la fuerza eléctrica total que las cuatro cargas ejercerían sobre una carga  $q'$  situada en  $O$  y la energía potencial electrostática de  $q'$  en  $O$ .

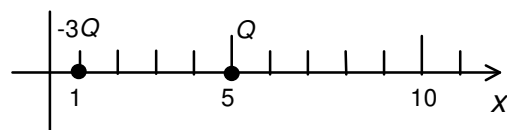
$$\text{Sol: } \vec{F} = 0 \quad U = q' \frac{q}{\pi \epsilon_0 a}$$



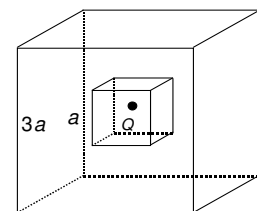
3. En la figura se muestran dos cargas puntuales,  $-3Q$  en  $x = 1$  y  $Q$  en  $x = 5$ .

- Halla en qué puntos del eje  $x$ ,
- se anula el potencial eléctrico
  - se anula el campo eléctrico

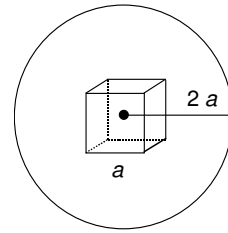
$$\text{Sol: } \begin{array}{l} \text{a) } x = 4, x = 7 \\ \text{b) } x = 10,46 \end{array}$$



4. Sea la carga puntual  $Q$  y las dos superficies cúbicas, paralelas, centradas en  $Q$ , y de lado  $a$  y  $3a$ , de la figura. Halla la relación existente entre los flujos del campo eléctrico que atraviesa ambas superficies ( $\Phi_a/\Phi_{3a}$ ). Justifica la respuesta.



5. Sea un cubo de arista  $a$  y densidad volumétrica de carga  $\rho$  uniforme, situado en el vacío. Se le rodea de una superficie esférica de radio  $2a$ . Determina el flujo del campo eléctrico a través de la esfera.



Sol:  $\Phi = \frac{\rho a^3}{\epsilon_0}$

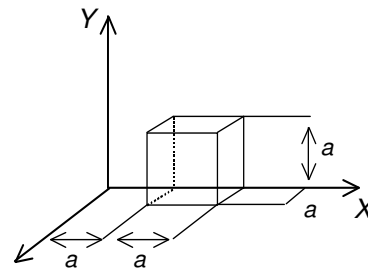
6. Dado el campo eléctrico definido por la función

$\vec{E} = (ax, 0, 0)$ , calcula:

a) Flujo a través de la superficie del cubo de la figura.

b) Carga encerrada en el cubo.

Sol: a)  $\Phi = a^4$   
 b)  $Q = \epsilon_0 a^4$



7. Aplica el teorema de Gauss para deducir la expresión del campo eléctrico creado por un plano infinito cargado con densidad superficial de carga  $\sigma$ .

8. Una carga puntual positiva  $q_1$ , está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales sobre el plano. Otra carga puntual negativa  $q_2$  está situada sobre el eje de ordenadas a una distancia de 1 m del origen. Determina:

a) Intensidad del campo eléctrico creado por cada una de las cargas en un punto A situado sobre el eje OX a 2 m del origen.

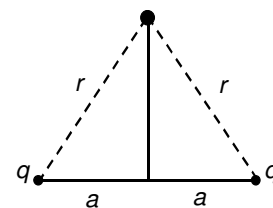
b) Trabajo necesario para trasladar una carga  $q$  desde el punto A a otro B de coordenadas (4,2) m.

Aplicación al caso en que  $q_1 = 10^{-9}C$ ,  $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}C$ ,  $q = 3 C$ .

Sol: a)  $\vec{E}_1 = 2,25\vec{i}$  N/C  $\vec{E}_2 = 1,61(-2\vec{i} + \vec{j})$  N/C b)  $W_{AB} = 3,59 J$

9. Dos cargas puntuales, positivas e iguales  $q$ , están separadas por una distancia  $2a$ . Una carga positiva unidad se coloca equidistante de ellas, tal como muestra la figura. ¿A qué distancia  $r$  experimentará una fuerza máxima?

Sol:  $r = a(3/2)^{1/2}$



10. Sea una línea recta muy larga (infinita) cargada con densidad lineal de carga  $\lambda$  constante. Calcula la intensidad de campo eléctrico creado por la línea infinita en un punto P situado a una distancia  $y$  de la línea.

Sol:  $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 y)$

11. Calcula la intensidad de campo eléctrico y potencial electrostático creado por una distribución esférica y homogénea de densidad de carga  $\rho$  y radio  $R$  en un punto situado a una distancia  $r$  del centro de la esfera:



a)  $r > R$ ; b)  $r = R$ ; c)  $r < R$

Sol: a)  $E = (1/3\epsilon_0)(\rho R^3/r^2)$ ;  $V = (\rho/3\epsilon_0)R^3/r$   
 b)  $E = (1/3\epsilon_0)\rho R$ ;  $V = (\rho/3\epsilon_0)R^2$   
 c)  $E = (1/3\epsilon_0)\rho r$ ;  $V = (\rho/2\epsilon_0)(R^2 - r^2/3)$

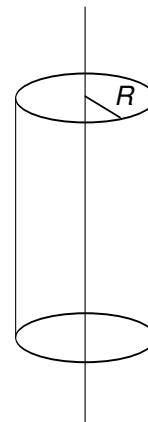
12. La figura muestra una porción de un cilindro de longitud infinita y radio  $R$ , cargado uniformemente con una densidad volumétrica de carga  $\rho$  constante.

Calcula:

a) Campo eléctrico en el interior y en el exterior del cilindro.

b) Diferencia de potencial entre el eje del cilindro y su superficie.

Sol: a)  $E_i = \rho r/2\epsilon_0$ ,  $E_e = \rho R^2/2\epsilon_0 r$   
 b)  $V = \rho R^2/4\epsilon_0$



## GLOSARIO

**Carga elemental:** Mínima cantidad de carga eléctrica, equivale a la carga del electrón y de valor  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

**Ley de Coulomb:** Dos cargas eléctricas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , en reposo, separadas una distancia  $r$  en el vacío, se ejercen entre sí una fuerza cuyo módulo es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que la separa, cuya dirección es la de la recta que las une y es repulsiva si son del mismo signo y atractiva si son de signo contrario.

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{r12}$$

**Campo eléctrico** en un punto del espacio es la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga  $q_0$  en dicho punto por unidad de carga. ( $q_0$  es una pequeña carga de prueba)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

**Campo eléctrico creado por una carga puntual**  $q$  sobre un punto a una distancia  $r$  de ella.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

**Dipolo eléctrico:** sistema de dos cargas iguales y de signo contrario separadas una pequeña distancia.

**Permitividad eléctrica del vacío:** Constante universal de valor  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$

**Teorema de Gauss.** El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada  $S$  es igual a la carga total encerrada dentro de  $S$  dividido por  $\epsilon_0$ .

**Potencial electrostático** de un punto del espacio es la energía que adquiere una carga cualquiera  $q_0$  situada en ese punto, dividido entre dicha carga.

$$V = \frac{U}{q_0}$$

**Potencial electrostático producido por una carga puntual**  $q$  sobre un punto a una distancia  $r$  de ella.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

**Principio de superposición:** El efecto total (fuerza, campo o potencial) producido por un conjunto de cargas equivale a la suma (del vector fuerza, vector campo o potencial) de los efectos originados por cada una por separado.

**Superficies equipotenciales.** Lugar geométrico de todos los puntos del espacio con el mismo potencial electrostático. Por un punto dado sólo pasa una.