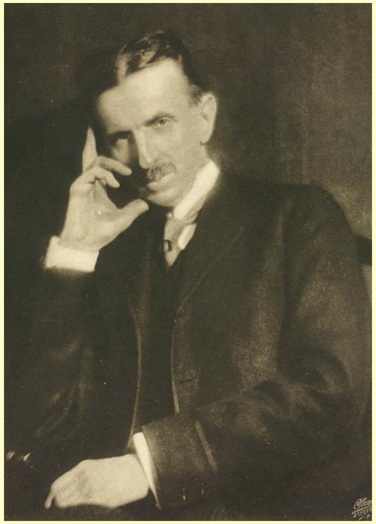
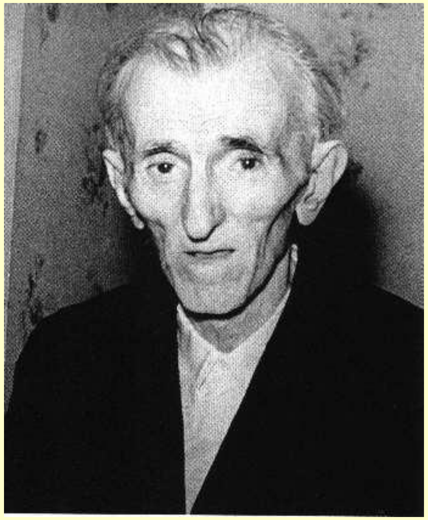
Lección 10: Circuitos de Corriente Alterna (A.C.)

- Introducción. Características de la corriente alterna.
- Diagrama fasorial.
- Comportamiento de los dipolos básicos (resistencia, autoinducción, condensador) ante una A.C.
- Circuito RLC serie. Impedancia y desfase.
- Resonancia. Filtros.

Cataratas del Niágara

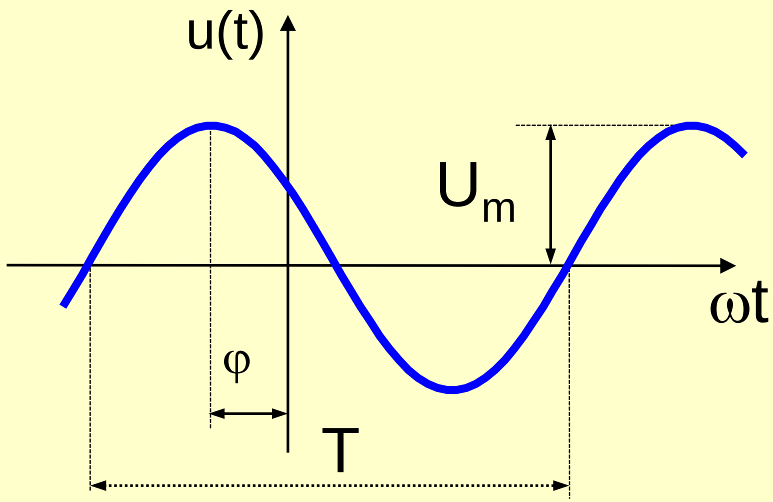




Nikola Tesla 1856-1943

Características de una corriente alterna senoidal

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$



- Período $T = 2\pi/\omega$ (s)
- Frecuencia $f = 1/T$ (Hz)
- Frecuencia angular (pulsación)
  $w = 2\pi f$ (rad/s)
- Fase $wt+\varphi$
- Fase inicial φ (grados o radianes) (fase en t=0)
- Amplitud=Voltaje máximo U_m (V)

- $U_{rms} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ es el valor eficaz. Es el valor que miden los voltímetros en A.C.

f Europa: 50 Hz

f América del Norte: 60 Hz

Diagrama fasorial

- Para simplificar el análisis de los circuitos de A.C se puede utilizar una representación gráfica de las funciones senoidales llamado diagrama fasorial.
- Un fasor es un vector cuyo módulo (longitud) es proporcional a la amplitud de la función senoidal a la que representa.
- El vector gira en sentido antihorario a una velocidad angular ω. El ángulo formado con el eje horizontal es la fase (ωt+φ).
- Entonces, dependiendo de si estamos trabajando con la función seno o con la función coseno, esta función queda representada por la proyección vertical o por la proyección horizontal del vector giratorio.

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$\text{Proyecciones} \begin{cases} \text{Horizontal}: U_m \cos(\omega t + \phi) \\ \text{Vertical}: U_m \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

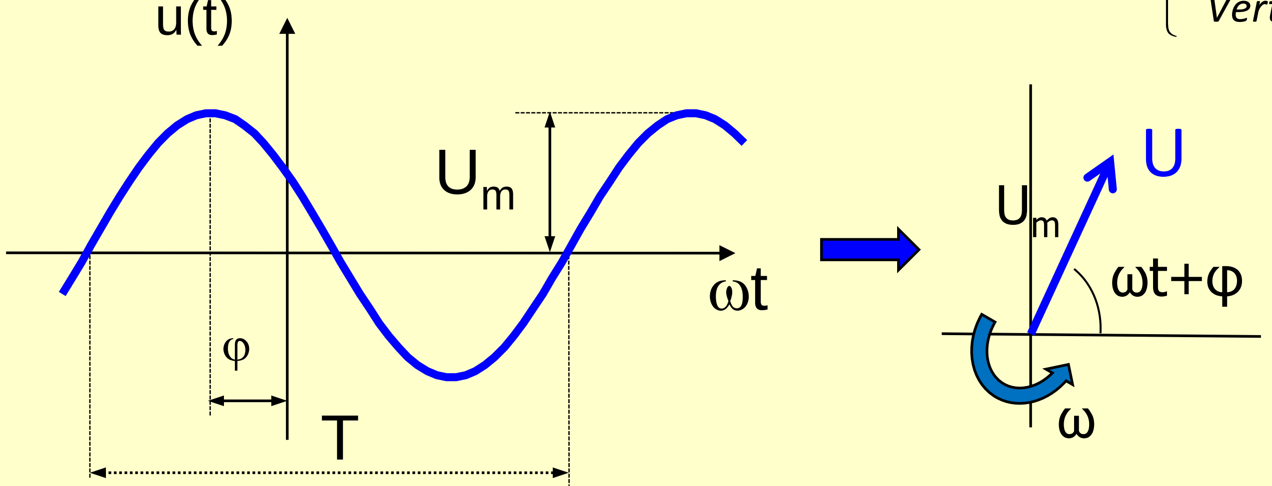


Diagrama fasorial

- Como la posición del fasor es diferente para cualquier instante considerado, la representación gráfica se hace en el instante $t=0$, por lo que la fase inicial φ es el ángulo entre el vector y el eje horizontal. Así, el fasor es un único vector (no cambia en el tiempo) para una función dada:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

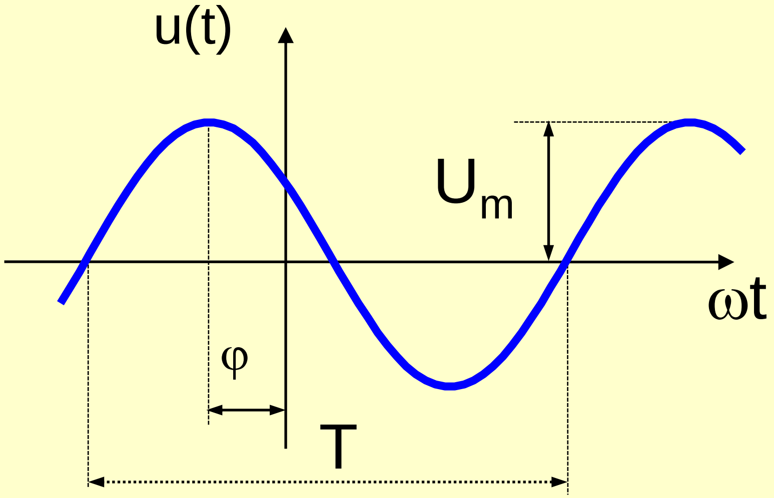
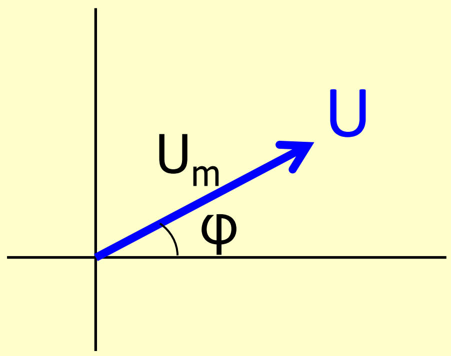
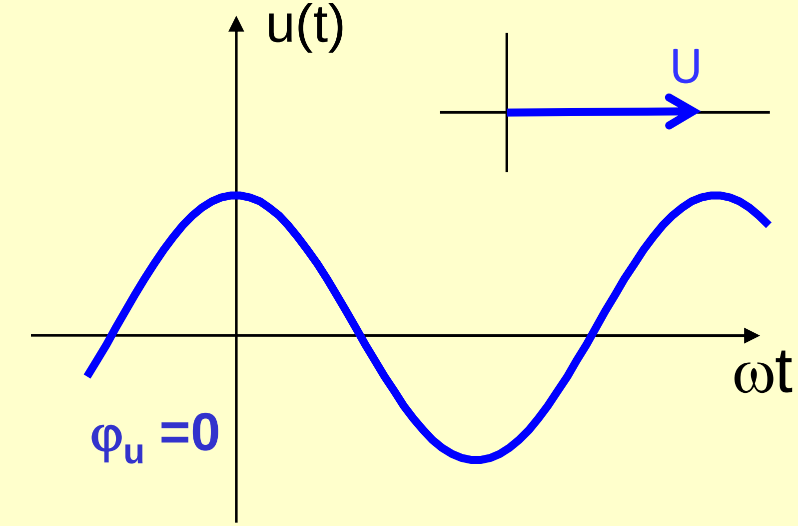


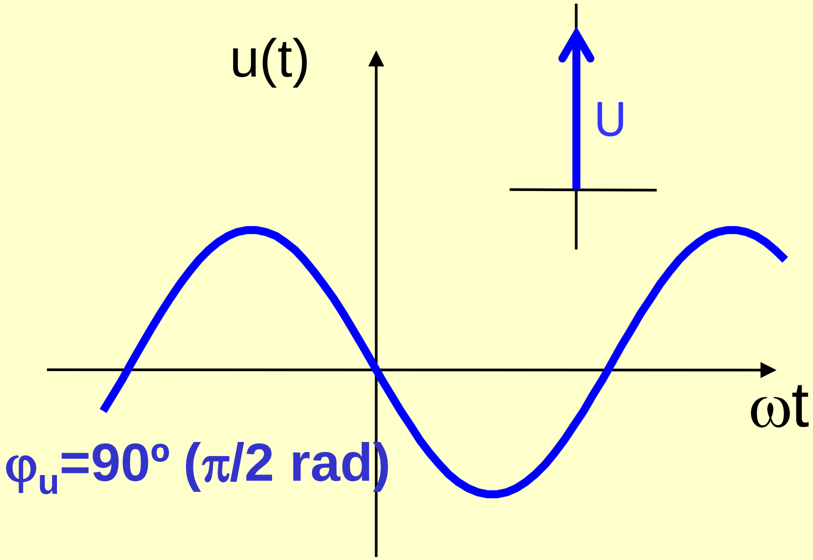
Diagrama fasorial

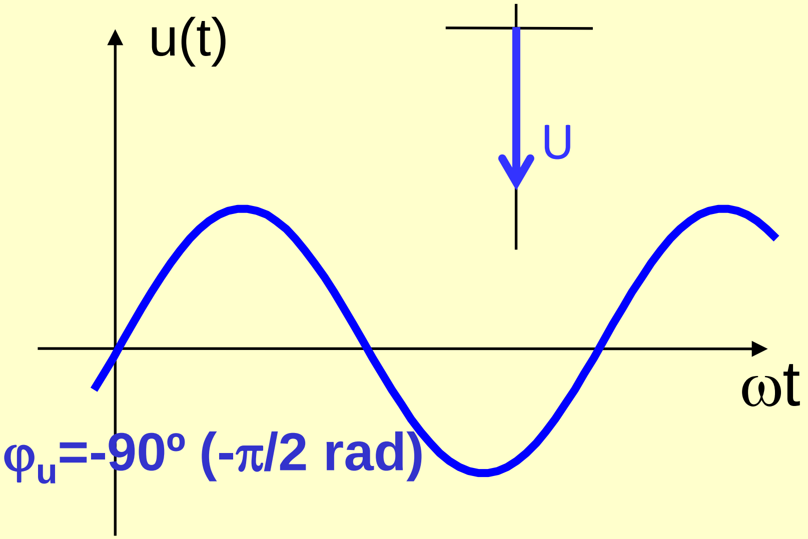


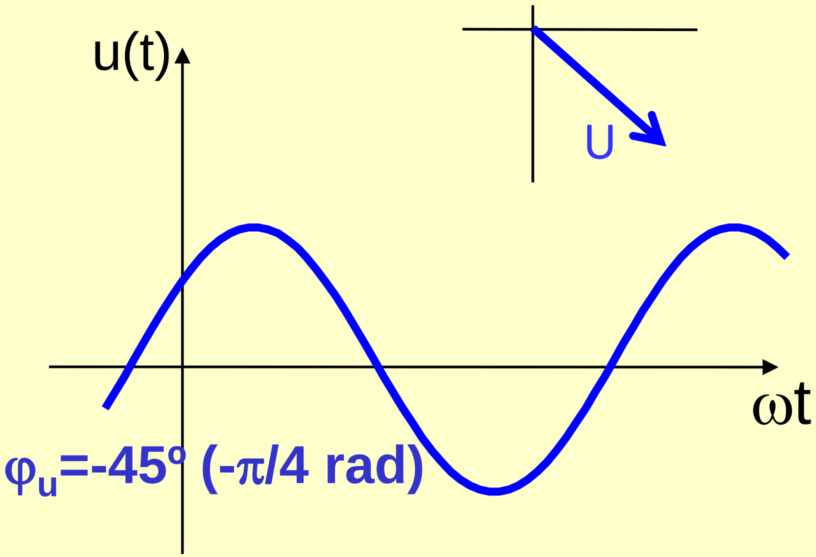
Fase inicial. Ejemplos.

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$









Desfase entre dos ondas (voltaje e intensidad)

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

El desfase se define como $\boxed{\varphi = \varphi_u - \varphi_i}$

Para poder compararse, ambas funciones deben ser seno o coseno, con la misma frecuencia angular

$\varphi_i = 0$ $\varphi_u < 0$ $\boxed{\varphi < 0}$

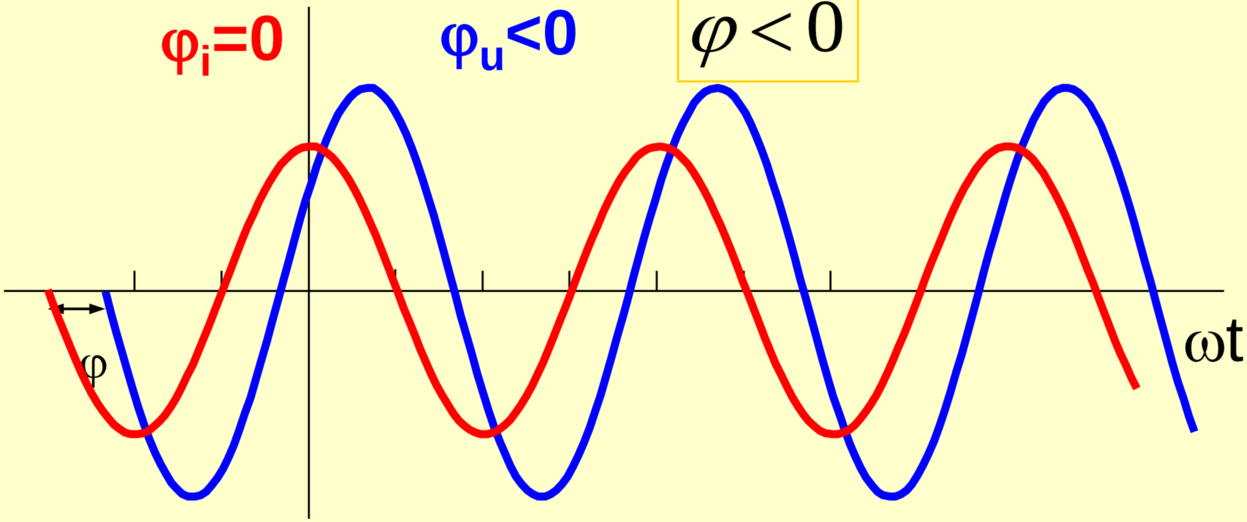
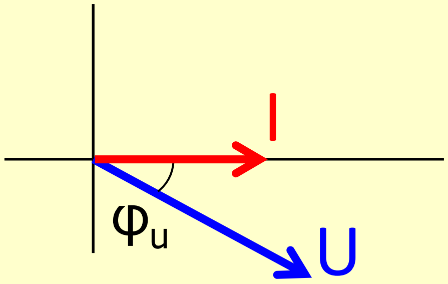


Diagrama fasorial

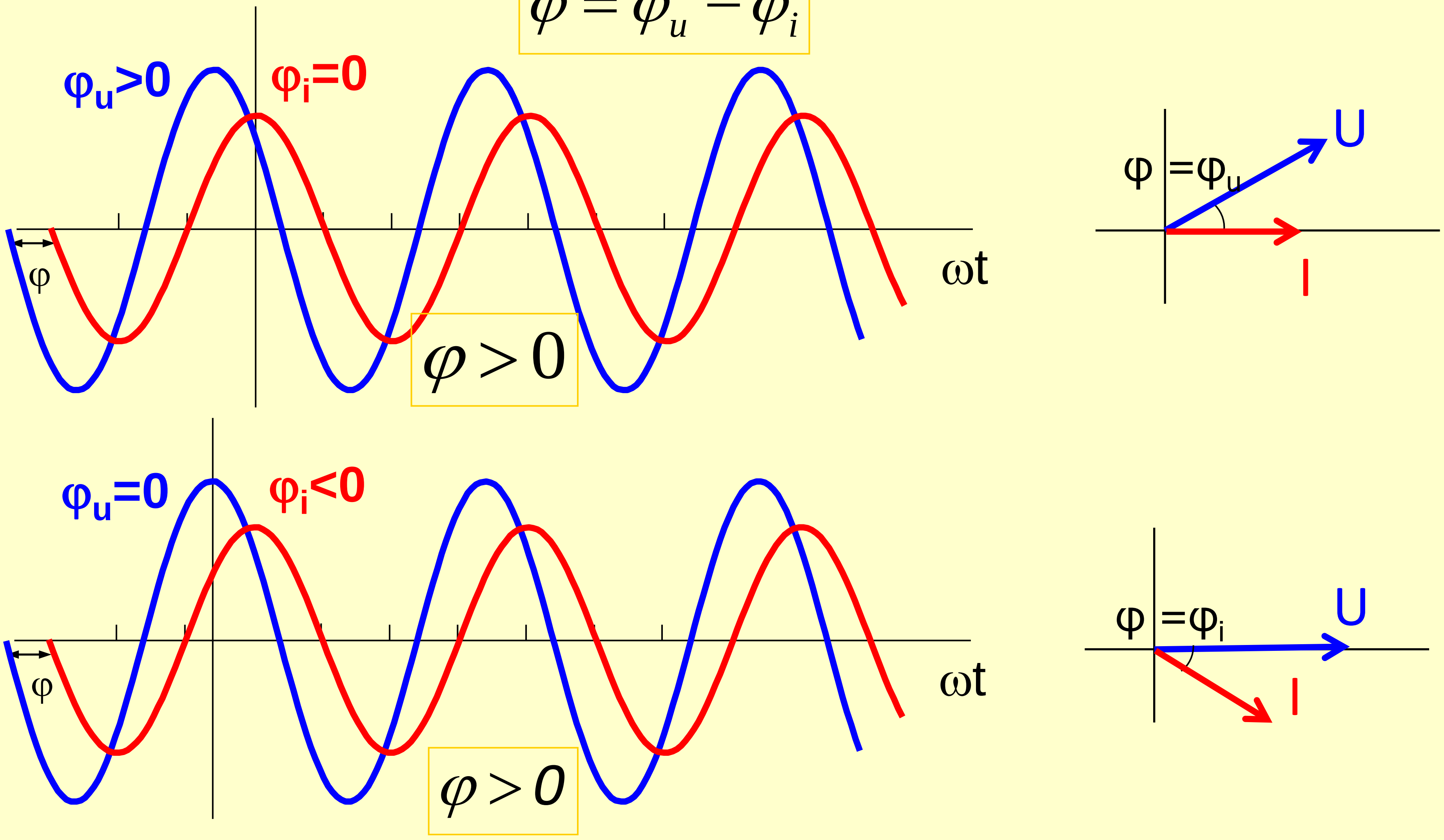


Voltaje $u(t)$ va retrasado respecto de la intensidad $i(t)$

Intensidad $i(t)$ va adelantada respecto del voltaje $u(t)$

Desfase entre dos ondas (voltaje e intensidad)

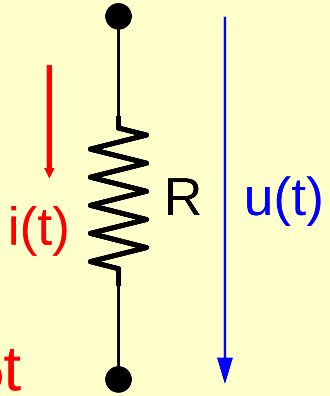
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$



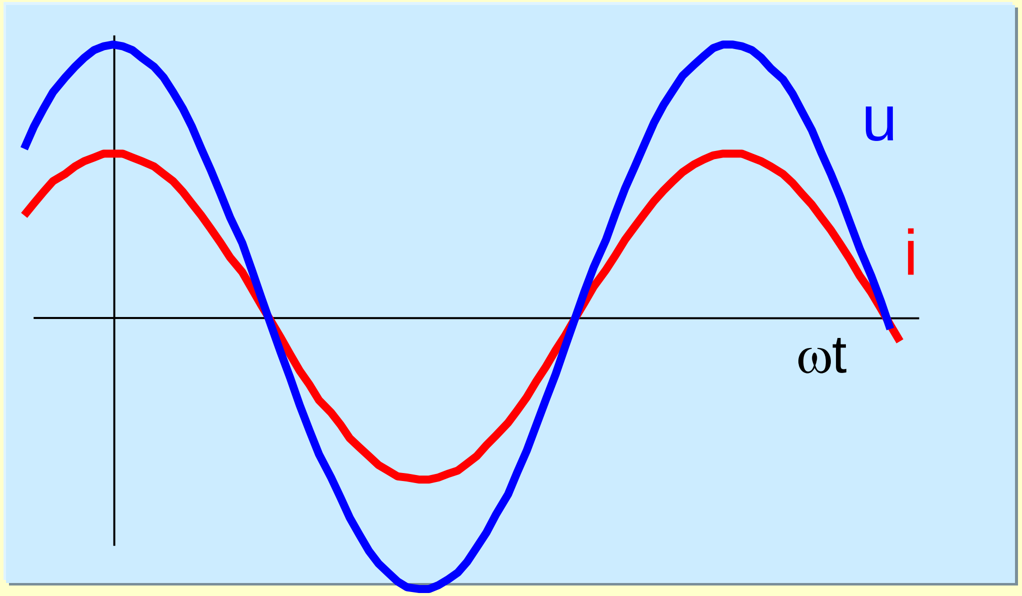
Comportamiento de los dipolos básicos. Resistencia

$u_R = iR$

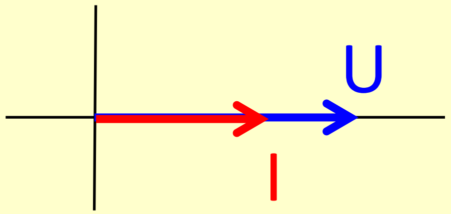
Resistencia



$i(t) = I_m \cos\omega t$



$u(t) = R\, i(t) = RI_m \cos\omega t = U_m \cos\omega t$



$U_m = R\, I_m$

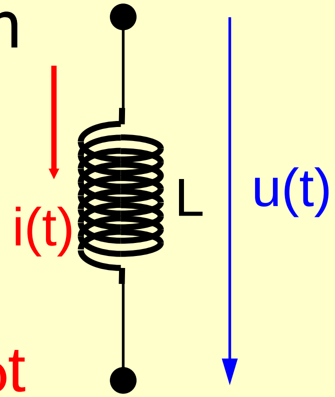
$\varphi = 0$

Tipler, capítulo 29.1

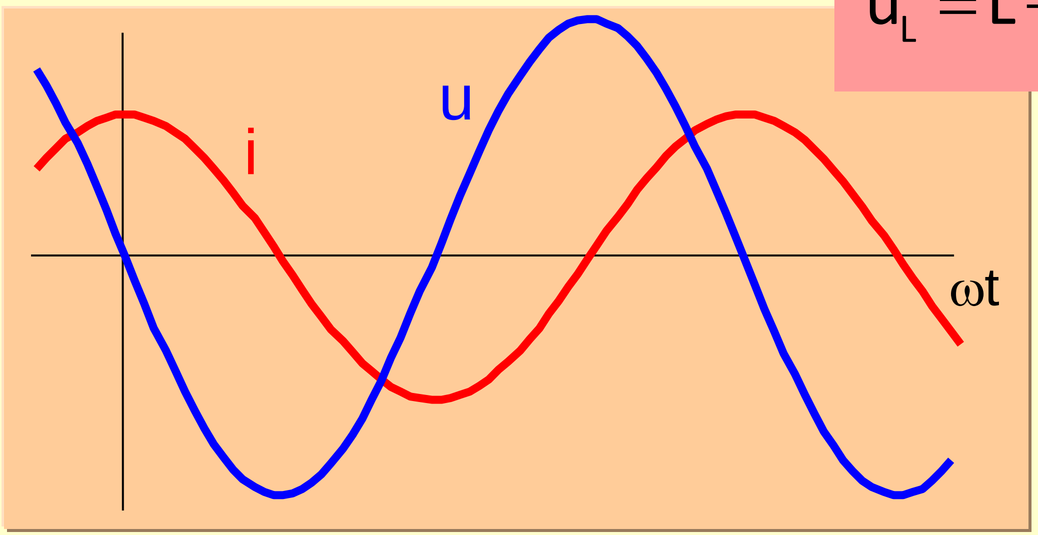
Comportamiento de los dipolos básicos. Autoinducción

$$u_L = L\frac{di(t)}{dt}$$

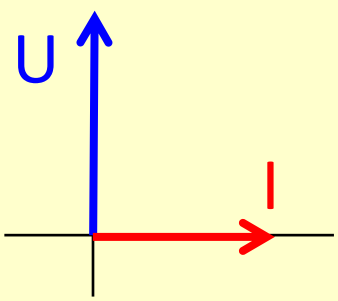
Autoinducción



$i(t) = I_m \cos\omega t$



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -L\omega I_m \operatorname{sen}\omega t = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



$U_m = L\omega I_m$

$\varphi = \pi/2$

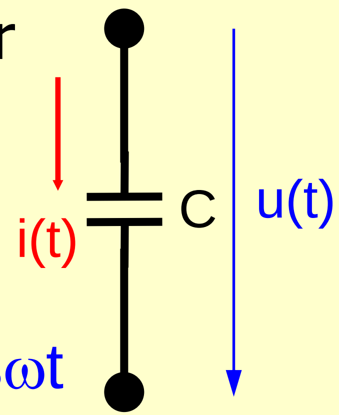
$X_L = L\omega$ Reactancia inductiva (Ω)

Tipler, capítulo 29.1

Comportamiento de los dipolos básicos. Condensador

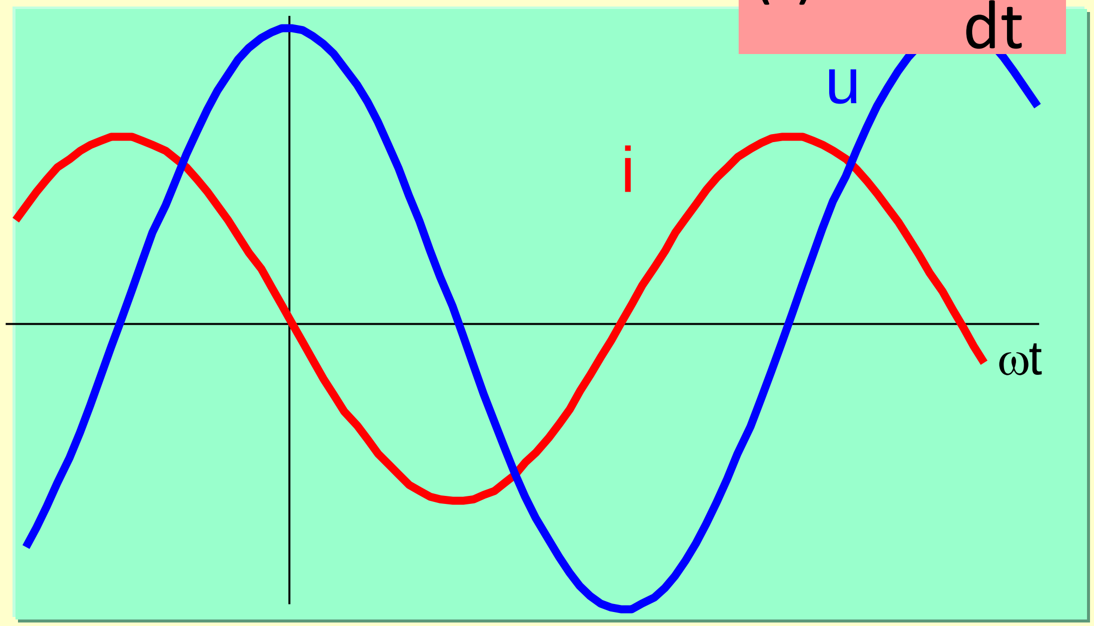
$$i(t) = C\frac{d(u_C)}{dt}$$

Condensador

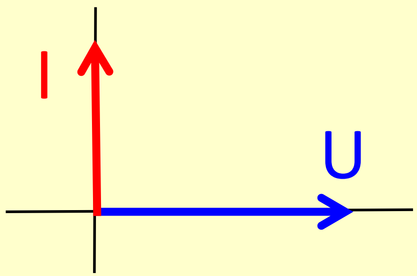


$u(t) = U_m \cos\omega t$

$q = Cu$



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{C\,du(t)}{dt} = -CU_m\omega \operatorname{sen}\omega t = CU_m\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



$$U_m = \frac{I_m}{C\omega}$$

$\varphi = -\pi/2$

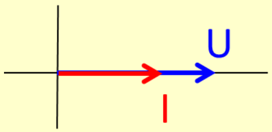
$X_C = 1/C\omega$ Reactancia capacitiva (Ω)

Tipler, capítulo 29.1

Comportamiento de los dipolos básicos. Resumen

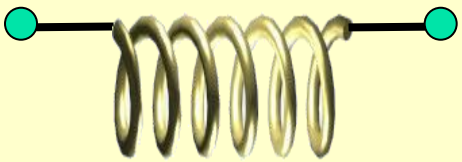
R

$$u_R = I_m R\cos(wt + \varphi_u) \quad \begin{cases} U_m^R = R\, I_m \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

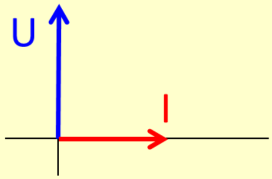


Voltaje e intensidad van en fase

L

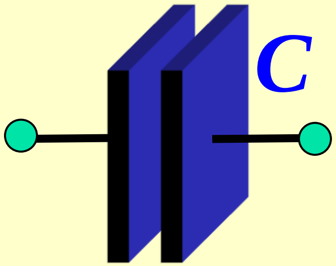


$$u_L = I_m Lw\cos(wt + \varphi_u) \quad \begin{cases} U_m^L = X_L\, I_m \\ \varphi = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

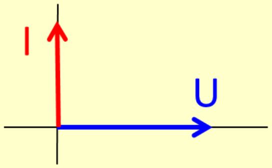


Voltaje va 90º delante de la intensidad

C



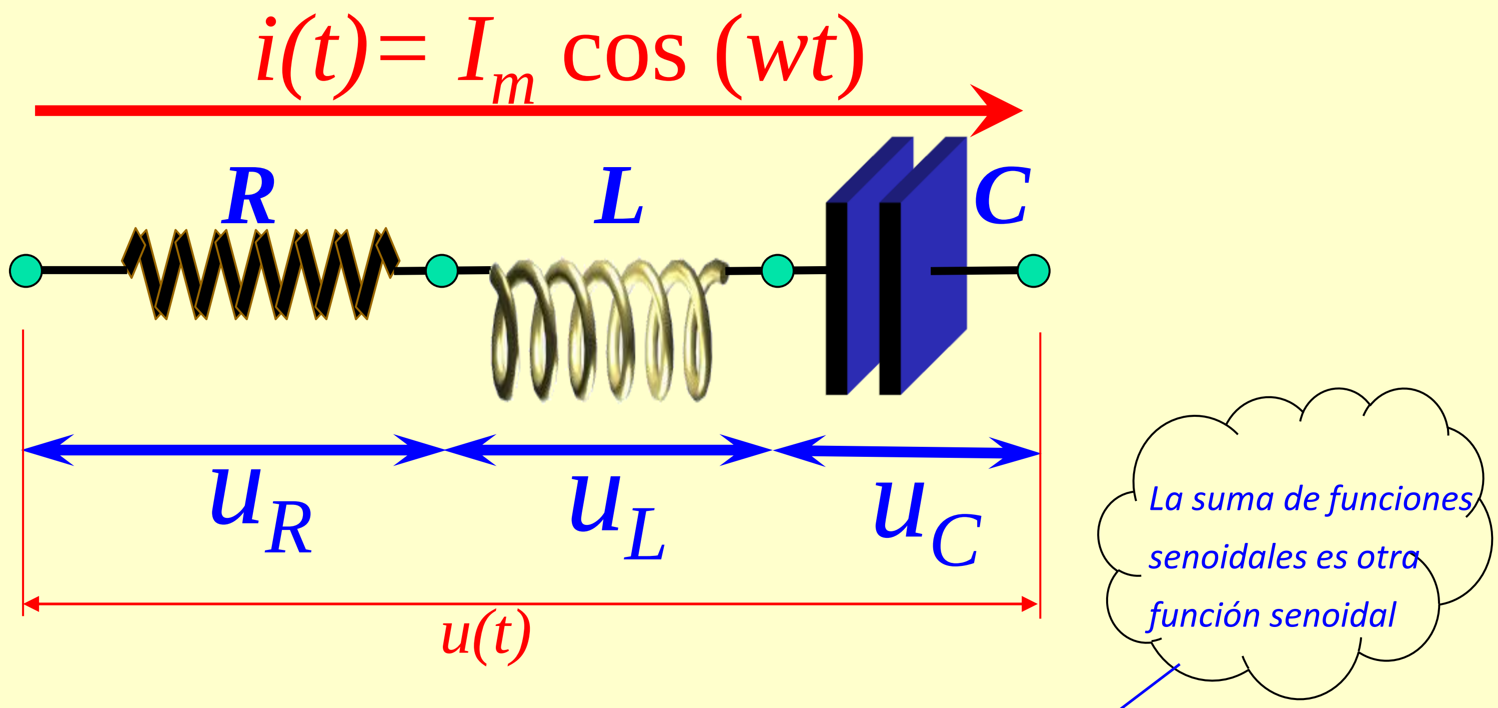
$$u_C = \frac{I_m}{Cw}\cos(wt + \varphi_u) \quad \begin{cases} U_m^C = X_C\, I_m \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Voltaje va 90º detrás de la intensidad

Circuito RLC serie. Impedancia del dipolo

- Sea un circuito con resistencia, autoinducción y condensador en serie. Si circula una intensidad senoidal $i(t)=I_m cos(wt)$ por esos dipolos, el voltaje en los terminales del circuito será la suma del voltaje en cada elemento:

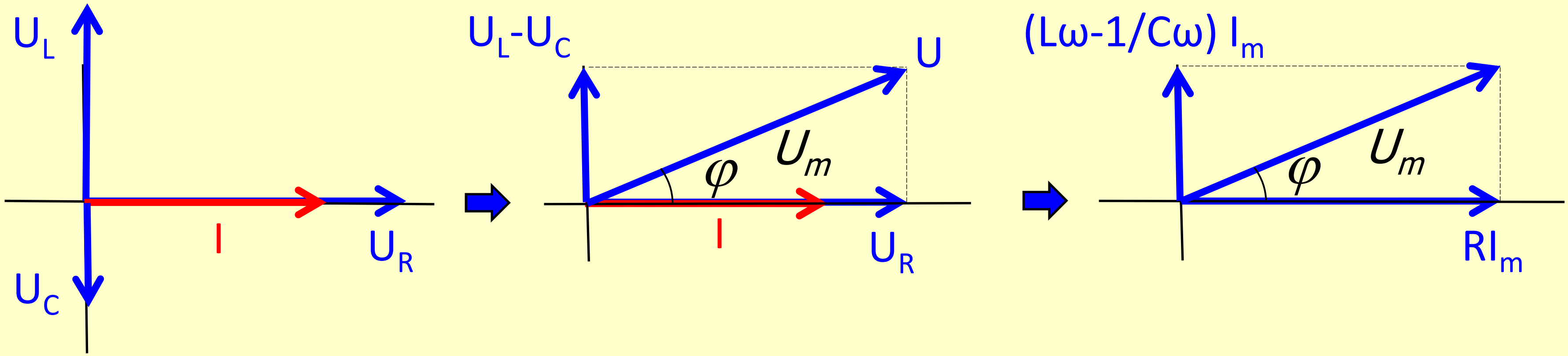


$$u(t) = u_L(t)+ u_R(t)+ u_C(t)= U_m \cos(wt+\varphi)$$

Circuito RLC serie. Impedancia del dipolo

$$U_m \cos(wt+\varphi) = LwIm \cos(wt+\pi/2) + RIm \cos(wt) + (1/Cw)Im \cos(wt-\pi/2)$$

$$U \quad = \quad U_L \quad + \quad U_R \quad + \quad U_C$$



$$U_m^2 = (RI_m)^2 + ((Lw - \frac{1}{Cw})I_m)^2 \Rightarrow U_m = I_m\sqrt{(R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2} \Rightarrow \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \boxed{\sqrt{R^2 + X^2} = Z}$$

$$tg\varphi = \frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \boxed{\frac{X}{R} = tg\varphi}$$

Z es la Impedancia del dipole (Ω)

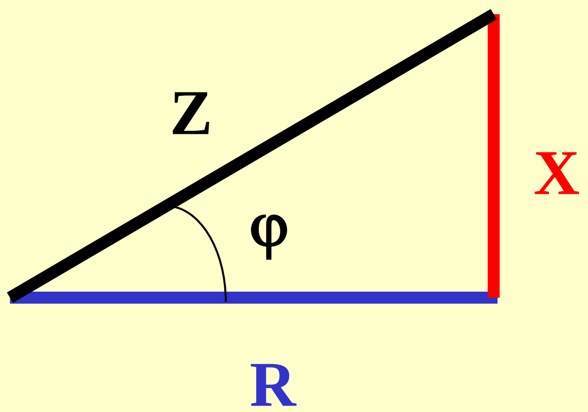
φ es el desfase del dipolo

φ varía entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

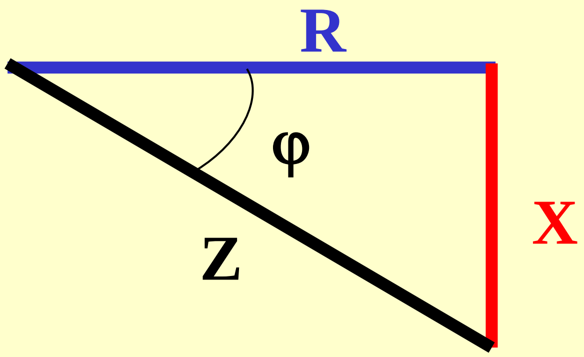
Z y φ no sólo dependen de R, L y C, sino también de la frecuencia de la corriente aplicada.

Triángulo de impedancias.

- Todas las ecuaciones de un dipolo RLC pueden resumirse en el Triángulo de impedancias del dipolo para una frecuencia dada:



X>0 (φ>0)



X<0 (φ<0)

$$Z = \sqrt{(R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$X = X_L - X_C = Lw - 1/Cw$$

Reactancia del dipolo

$$tg\varphi = \frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}$$

Circuito RLC serie. Resonancia

Representando Z frente a la frecuencia $$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{(R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}$$

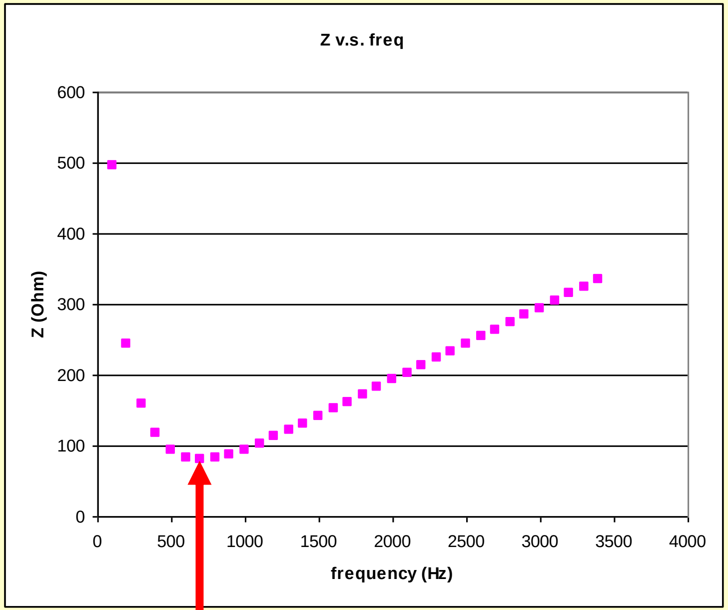
Hay una frecuencia para la cual X_L=X_C donde la impedancia alcanza un mínimo (Z=R).

Esta frecuencia se llama Frecuencia de resonancia (f_0) y puede calcularse fácilmente:

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

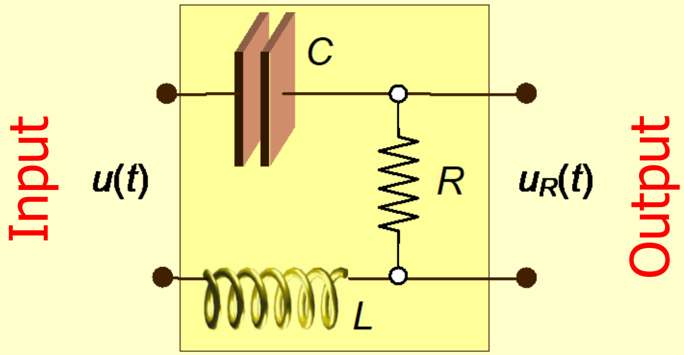
Ejemplo tomando: R = 80 Ω L = 100 mH C = 20 µF

En resonancia, la impedancia del circuito es mínima, y la amplitud de la intensidad alcanza un máximo (para un voltaje dado). Intensidad y voltaje en los terminales del circuito RLC van en fase.



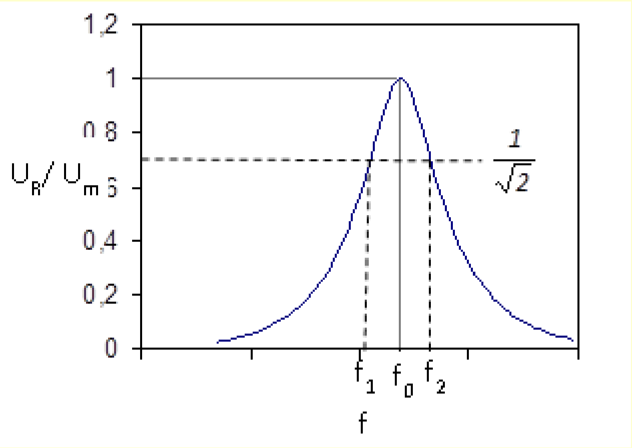
Resonancia: f_0=707 Hz Z=80 Ω

Circuito RLC serie como filtro pasabanda



$$U_{ouput} = U_R = RI_m = R\frac{U_m}{Z} = \frac{RU_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

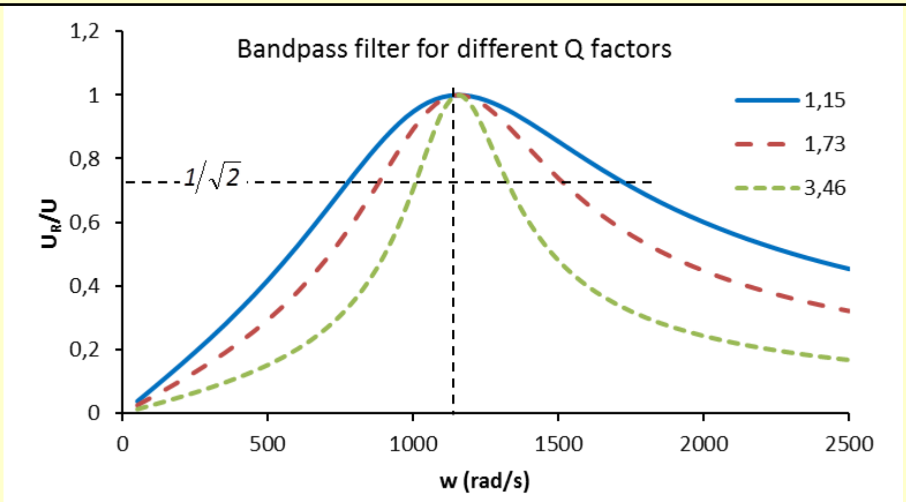
$$\frac{U_{output}}{U_{input}} = \frac{U_R}{U_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$



Banda pasante $[f_1 , f_2]$

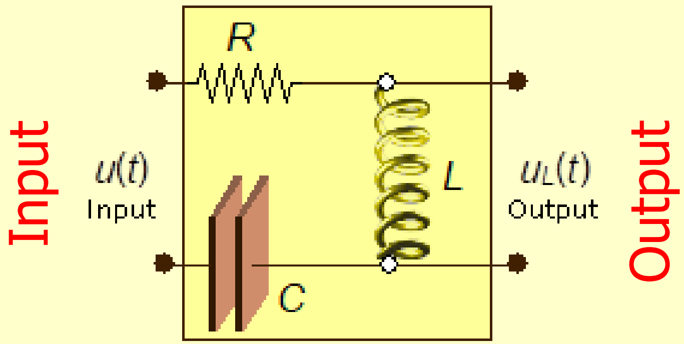
$$\left.\frac{U_R}{U_m}\right|_{f_1,f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



El circuito de sintonía de una radio es un filtro pasabanda

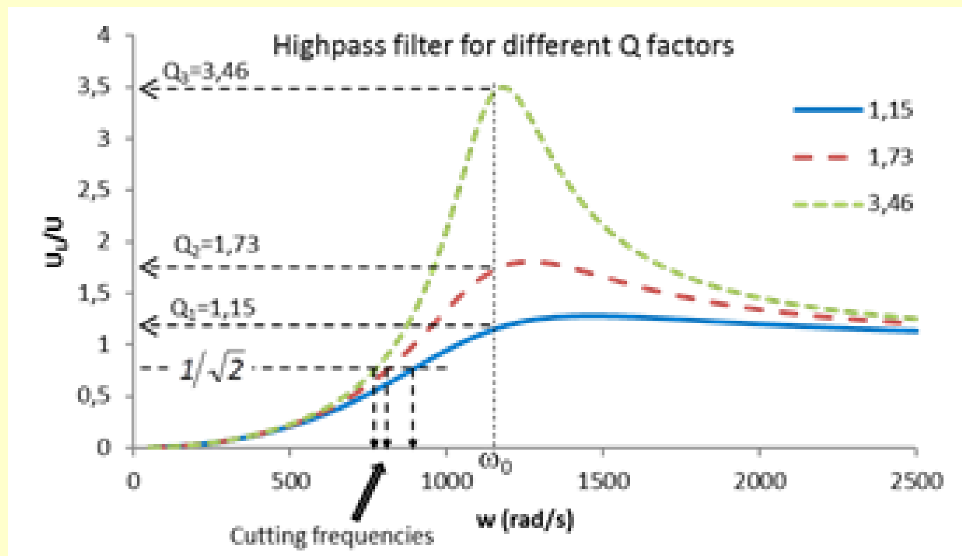
Circuito RLC serie como filtro pasaalta



$$U_{ouput} = U_L = L\omega I_m = L\omega \frac{U_m}{Z} = \frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\frac{U_{ouput}}{U_{input}} = \frac{U_L}{U_m} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

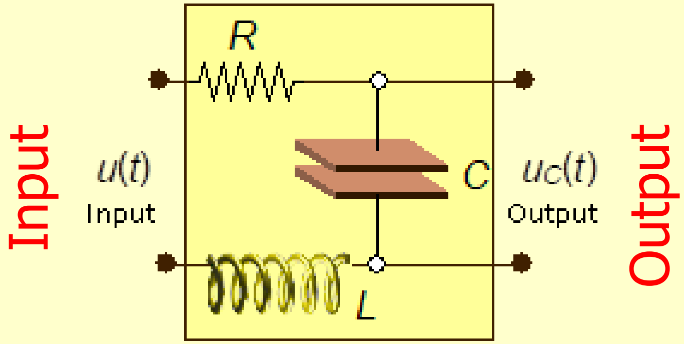
$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Banda pasante [f_1 , ∞]

$$\left.\frac{U_L}{U_m}\right|_{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

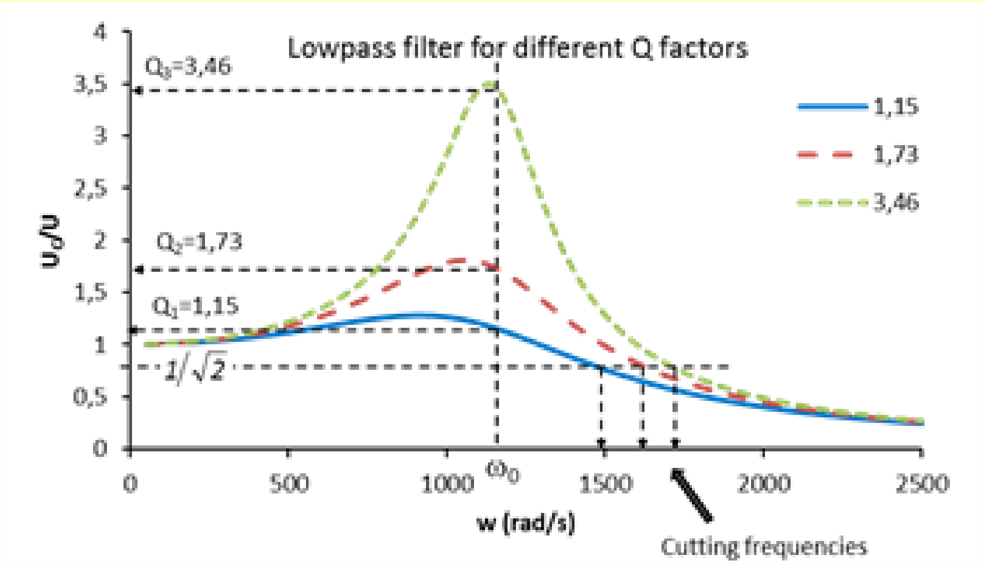
Circuito RLC serie como filtro pasabaja



$$U_{ouput} = U_C = \frac{1}{C\omega} I_m = \frac{1}{C\omega}\frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{C\omega\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\frac{U_{ouput}}{U_{input}} = \frac{U_C}{U_m} = \frac{1}{C\omega\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Banda pasante [0, f_1]

$$\left.\frac{U_C}{U_m}\right|_{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$