



- 5.1 Introducción. Definiciones
- 5.2 Leyes de Kirchhoff
- 5.3 Principio de superposición
- 5.4 Teorema de Thevenin
- 5.5 Problemas

### Objetivos

- Conocer las leyes de Kirchhoff y saber utilizarlas para analizar circuitos sencillos de corriente continua.
- Resolver circuitos de corriente continua.
- Calcular circuitos equivalentes de otros, aplicando los teoremas de superposición y de Thevenin.

### 5.1 Introducción. Definiciones

Hasta ahora, en los temas anteriores hemos estudiado la relación entre la tensión y la intensidad en diferentes elementos en corriente continua: generadores, receptores y resistencias. Hemos aprendido a calcular la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito, y la intensidad en un circuito cerrado constituido por estos elementos.

Los circuitos que hemos manejado hasta el momento eran muy sencillos, puesto que en ellos prácticamente no aparecían ramificaciones. En algún caso aparecía alguna ramificación constituida por varias resistencias que simplemente era sustituida por su resistencia equivalente. En este tema vamos a aprender a calcular las intensidades que circulan por circuitos más complejos en corriente continua constituidos también por los elementos básicos comentados anteriormente: resistencias, generadores y receptores.

En primer lugar veamos algunas definiciones de una serie de conceptos que utilizaremos a lo largo de todo el tema.

**Dipolo:** Se entiende por dipolo cualquier elemento electrónico con dos terminales (también llamados bornes), como por ejemplo una resistencia, un generador, un diodo, etc. En contrapartida, por ejemplo, un transistor no sería un dipolo al poseer tres terminales. Se distingue además entre dipolo activo y dipolo pasivo. Los **dipolos activos** son aquellos dipolos que aportan energía al sistema: generadores. Los **dipolos pasivos** son aquellos que consumen energía: resistencias, autoinducciones, condensadores, receptores, etc.

**Dipolo lineal:** un dipolo se denomina lineal, cuando la relación entre la tensión y la intensidad es lineal.

**Red eléctrica:** Se denomina red eléctrica a un conjunto de dipolos asociados entre sí y formando circuitos cerrados interconectados. En la Figura 5-1 se muestra un ejemplo de una red eléctrica.

Una red se considera **lineal** cuando está constituida por dipolos lineales. De esta forma, no son objeto de este tema el análisis de circuitos eléctricos con elementos no lineales, como puedan ser diodos y transistores.

En nuestro caso, únicamente trabajaremos con redes eléctricas en corriente continua. De todos modos, conviene comentar que los métodos de trabajo que abordaremos en este tema son también válidos para redes en corriente alterna.

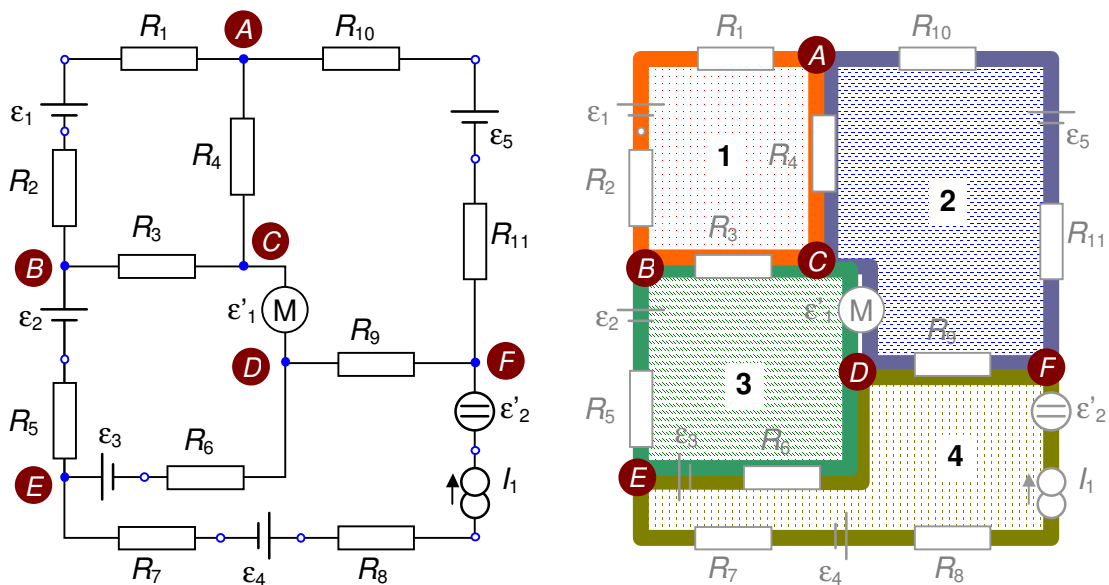


Figura 5-1. Red eléctrica plana: nudos y mallas

**Nudo** es un punto de una red donde concurren tres o más dipolos. En el ejemplo de la Figura 5-1, la red tiene 6 nudos que están representados por letras de la A a la F.

**Rama** es un tramo de circuito entre dos nudos consecutivos. Así nos referiremos a la intensidad que circula por la rama  $AB$  o diremos que la rama  $EF$  contiene un receptor. Por una rama circula una única intensidad.

**Malla** es un circuito cerrado formado por ramas, de tal modo que partiendo de un punto y siguiendo un sentido, se pueda volver a él pasando sólo una vez por cada rama, y que no contiene ninguna rama en su interior. En el ejemplo de la Figura 5-1 hay 4 mallas numeradas de la 1 a la 4.

Una red se denomina **plana** si cada rama es común como máximo a dos mallas. Observa que esta denominación viene por el hecho de que una red plana siempre se puede construir en un plano, mientras que si no se cumple esa condición es necesaria una estructura tridimensional para su realización.

En este tema se estudian algunos métodos generales para el análisis de redes planas y lineales, en corriente continua y régimen estacionario (independiente del tiempo).

## 5.2 Leyes de Kirchhoff

Gustave Kirchhoff fue un físico alemán (1824-1887) que puso las bases de la teoría de resolución de redes eléctricas al plantear dos leyes conocidas con el nombre de leyes de Kirchhoff: la ley de los nudos y la ley de las mallas.

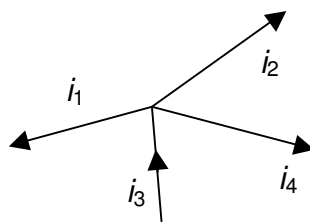
**Ley de los nudos:** Es consecuencia de la ley de conservación de la carga, esto es, que la suma de las cargas que entran en un nudo es igual a la suma de las cargas que salen de él. Puesto que la intensidad de corriente eléctrica es la cantidad de carga que atraviesa una sección transversal de un conductor por unidad de tiempo, esto implica que **la suma de las intensidades que entran en un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen de dicho nudo**. Habitualmente se toma con un signo las intensidades que entran en un nudo, y con signo contrario las que salen. Con este convenio se puede enunciar la ley de los nudos de la siguiente forma:

La suma algebraica de las intensidades que entran en un nudo es cero.

$$\sum i_k = 0$$

Ecuación 5-1

En la Figura 5-2 se muestra un ejemplo de aplicación de esta ley.



$$-i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

Figura 5-2. Aplicación de la ley de los nudos

**Ley de las mallas:** La segunda ley es consecuencia de que un punto no puede tener dos potenciales diferentes. En consecuencia,

La suma de las caídas de tensión en todas las ramas de una malla es cero.

$$\sum V_k = 0$$

Ecuación 5-2

Para utilizar la ley, en primer lugar definiremos un sentido de circulación arbitrario que nos proporcione un criterio de signos fijo, por ejemplo un sentido como el de las agujas del reloj. De acuerdo con este sentido, salimos de un punto cualquiera de una malla y calculamos la diferencia de potencial entre cada dos nudos aplicando la ecuación:

$$V_A - V_B = I \sum R_i - \sum \varepsilon_j$$

que se estudió en el tema anterior, considerando que cada rama tiene una intensidad diferente, y teniendo en cuenta el criterio de signos descrito en dicho tema.

En el ejemplo siguiente se muestra como se aplica la regla de las mallas para la malla de la Figura 5-33:

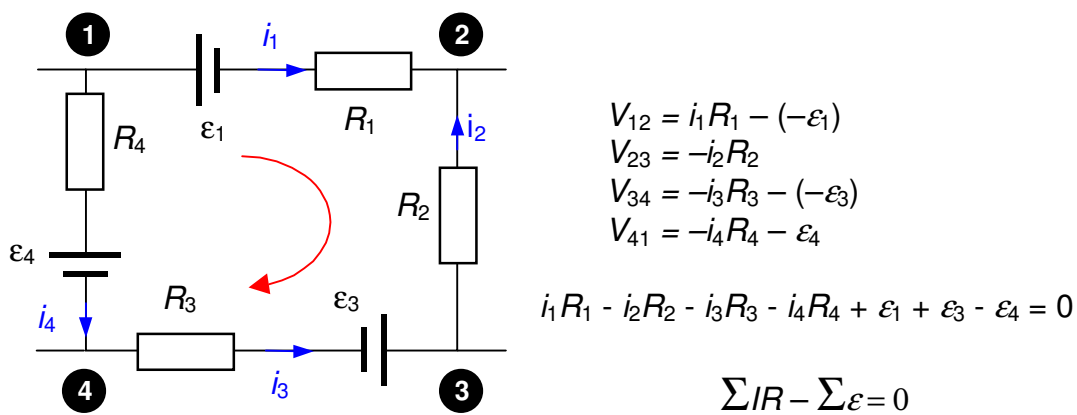


Figura 5-3. Aplicación de la ley de las mallas

La ley de las mallas se puede aplicar a cualquier camino cerrado en el circuito, y no únicamente a las mallas del mismo.

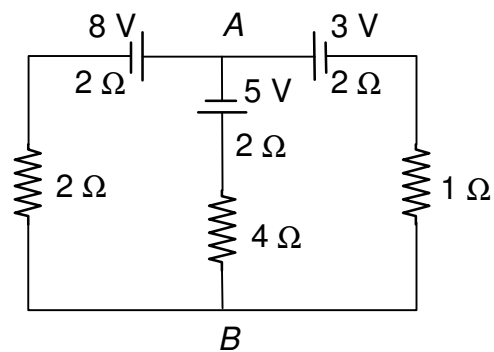
Aplicando en un circuito la ley de los nudos a todos los nudos del mismo, y la ley de las mallas a todos los caminos cerrados del mismo, se puede obtener un gran número de ecuaciones, pero algunas de ellas serán combinación lineal del resto.

En una red plana constituida por  $n$  nudos y  $m$  mallas, se puede comprobar que el número de ecuaciones linealmente independientes para resolverlo viene dado por  $n - 1 + m$ .

### Ejemplo 5-1

Utilizando las leyes de Kirchoff, determina las corrientes que circulan por las distintas ramas de la red de la figura.

Determina la diferencia de potencial entre A y B.

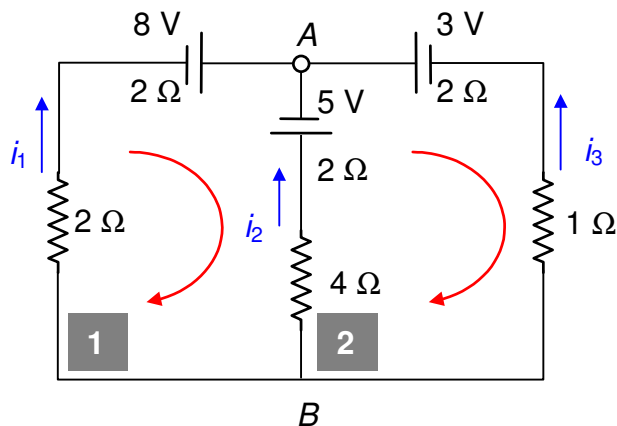


#### Solución

En primer lugar, se identifican las intensidades distintas existentes, se numeran, y se les da un sentido hipotético. De este modo, establecemos  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .

Planteando la ley de los nudos en el nudo A, se tiene:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$



Para plantear la ley de las mallas, se recorren éstas en el sentido de las agujas del reloj. Así, en la malla 1:

$$\sum iR = \sum \mathcal{E} \quad 4i_1 - 6i_2 = 8 + 5$$

Obsérvese que  $i_1$  figura con signo positivo al coincidir con el sentido de circulación prefijado inicialmente, mientras que  $i_2$  es negativa al tener sentido contrario. Del mismo modo, las fuerzas electromotrices son las dos positivas.

En la malla 2 se tiene igualmente:

$$6i_2 - 3i_3 = -5 - 3$$

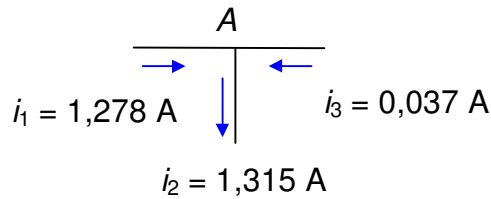
Finalmente, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ 4i_1 - 6i_2 &= 13 \\ 6i_2 - 3i_3 &= -8 \end{aligned} \right\}$$

que resuelto, da las siguientes soluciones:

$$i = \begin{pmatrix} 1,278 \\ -1,315 \\ 0,037 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Con este resultado, se deduce que los sentidos de las corrientes  $i_1$  e  $i_3$ , que fueron arbitrarios, coinciden con los reales, mientras que  $i_2$  tiene sentido contrario al supuesto, por lo que la situación real es:

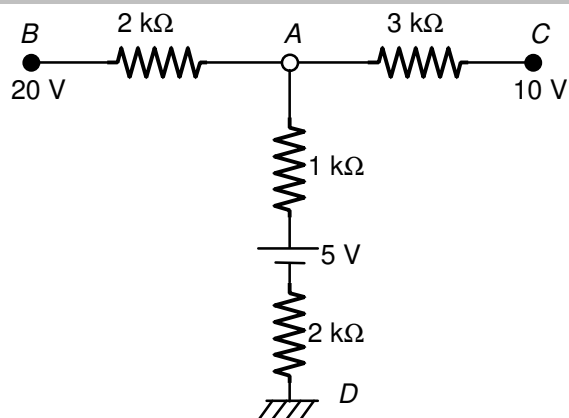


Finalmente, para calcular  $V_{AB}$  se plantea:

$$V_A - V_B = \sum iR - \sum \varepsilon = 6i_2 - 5 = 2,89 \text{ V}$$

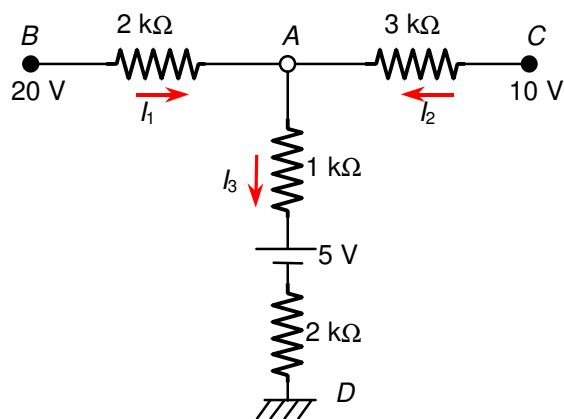
### Ejemplo 5-2

Calcula el potencial del punto A y las intensidades de corriente por las ramas del circuito de la figura utilizando las leyes de Kirchhoff.



#### Solución

Primero establecemos una hipótesis de sentido de intensidades de corriente por las ramas del circuito. Por ejemplo, las señaladas en el dibujo.



De este modo, la primera ley aplicada al nudo A será:

$$\sum i_k = 0 \rightarrow i_1 + i_2 = i_3$$

La diferencia de potencial entre los extremos de cada rama nos permite extraer expresiones de las intensidades en cada una de ellas en función de los datos del problema y del potencial del nudo A:

$$\text{Rama AB: } V_{BA} = i_1(2k) = 20 - V_A \quad \rightarrow \quad i_1 = \frac{20 - V_A}{2 \cdot 10^3}$$

$$\text{Rama CA: } V_{CA} = i_2(3k) = 10 - V_A \quad \rightarrow \quad i_2 = \frac{10 - V_A}{3 \cdot 10^3}$$

$$\text{Rama AD: } V_{AD} = i_3(1k + 2k) - (-5) = V_A - 0 \quad \rightarrow \quad i_3 = \frac{V_A - 5}{3 \cdot 10^3}$$

Volviendo a la expresión de la primera ley obtendremos el valor del potencial en el nudo A:

$$\frac{20 - V_A}{2 \cdot 10^3} + \frac{10 - V_A}{3 \cdot 10^3} = \frac{V_A - 5}{3 \cdot 10^3}$$

$$60 - 3V_A + 20 - 2V_A = 2V_A - 10$$

$$7V_A = 90 \rightarrow V_A = \frac{90}{7} \text{ V}$$

Sustituyendo el valor de  $V_A$  en las expresiones de las intensidades obtendremos su valor:

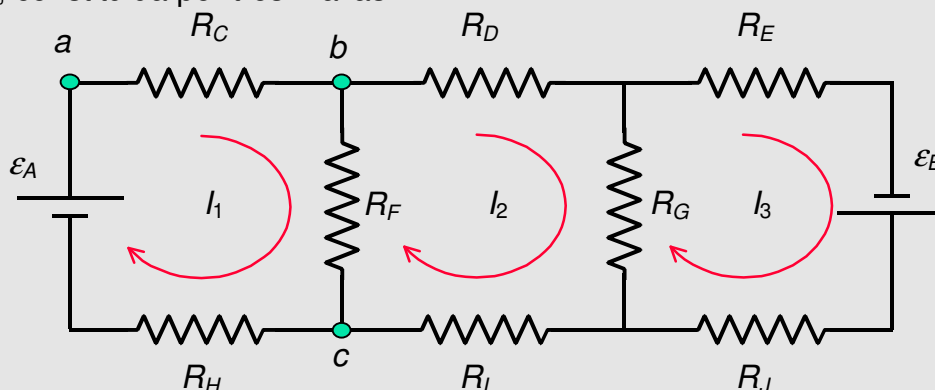
$$I_1 = \frac{25}{7} \text{ mA}; \quad I_2 = -\frac{20}{21} \text{ mA}; \quad I_3 = \frac{55}{21} \text{ mA}$$



### Método matricial de las corrientes de malla

Vamos a ver ahora un método para resolver redes eléctricas denominado método matricial de las corrientes de malla que permite la resolución (cálculo de las intensidades en cada rama) de una red lineal plana de una forma sistemática.

Para ello vamos a partir de un ejemplo sencillo: la red que se muestra en la figura, constituida por tres mallas.



En este método, primero se definen unas corrientes ficticias asociadas a cada malla,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , tal y como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, y se calculan dichas corrientes de malla. Una vez calculadas las intensidades de malla, resulta sencillo calcular las intensidades en cada rama. La intensidad de las ramas que pertenecen a una sola malla coincide con la intensidad de la malla: por ejemplo, la intensidad que circula del punto  $a$  al punto  $b$  coincide con la intensidad de malla 1. Por otro lado, la intensidad que circula por las ramas que pertenecen a dos mallas es la suma algebraica de las intensidades de malla correspondientes: por ejemplo, la intensidad que circula del punto  $b$  al punto  $c$  es igual a la intensidad de la malla 1 menos la intensidad de la malla 2.

Dichas intensidades de malla han de definirse todas ellas en el mismo sentido (o bien horario, o bien contrario a las agujas del reloj). En este caso se ha escogido el sentido horario.

Para cada una de las mallas planteamos la segunda regla de Kirchhoff: la suma de las caídas de tensión en una malla ha de ser cero:

$$\sum V_i = 0$$

A la hora de calcular estas caídas de tensión, recorreremos las mallas en el mismo sentido definido para las intensidades de malla, en este caso horario. Previamente, y para poder aplicar esta expresión, en el caso de que exista algún generador de intensidad, hay que convertirlo en su generador equivalente de tensión.

De esta forma, para la primera malla tenemos que el sumatorio de las caídas de tensión en dicha malla es igual (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) al producto de la primera resistencia  $R_C$  por la intensidad que circula por ella  $I_1$ , más el producto de la segunda resistencia  $R_F$  por la intensidad que circula por ella  $(I_1 - I_2)$ , más el producto de la tercera resistencia  $R_H$  por la intensidad que circula por ella  $I_1$ , menos el sumatorio de las fuerzas electromotrices y contraelectromotrices, donde en este caso solamente aparece la fuerza electromotriz  $\varepsilon_A$ . A la hora de calcular este sumatorio de fuerzas electromotrices y contraelectromotrices, hay que tener en cuenta el criterio de signos explicado en el tema anterior: las fuerzas electromotrices y contraelectromotrices aparecen con el signo del borne por el que se sale al recorrer la malla. Dicho sumatorio de las caídas de tensión debe ser igual a cero:

$$0 = R_C I_1 + R_F (I_1 - I_2) + R_H I_1 - \varepsilon_A$$

De forma análoga, para las otras dos mallas obtenemos las ecuaciones

$$0 = R_D I_2 + R_G (I_2 - I_3) + R_I I_2 + R_F (I_2 - I_1)$$

$$0 = R_E I_3 + R_J I_3 + R_G (I_3 - I_2) - \varepsilon_B$$

Si ahora pasamos las fuerzas electromotrices al lado izquierdo de las igualdades, y reagrupamos términos, podemos escribir estas tres ecuaciones de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \varepsilon_A = (R_C + R_F + R_H) I_1 - R_F I_2 \\ 0 = -R_F I_1 + (R_D + R_G + R_I + R_F) I_2 - R_G I_3 \\ \varepsilon_B = -R_G I_2 + (R_E + R_J + R_G) I_3 \end{cases}$$

Como vemos, tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (recuerda que el propósito que se persigue es el cálculo de las intensidades de rama, que se puede obtener a partir de las tres intensidades de malla,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ ). Dicho sistema de ecuaciones lo podemos escribir en forma matricial de la siguiente forma:



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ 0 \\ \varepsilon_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_C + R_F + R_H & -R_F & 0 \\ -R_F & R_D + R_G + R_I + R_F & -R_G \\ 0 & -R_G & R_E + R_J + R_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Este sistema matricial de ecuaciones puede ahora resolverse mediante cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones matriciales.

Una lectura “cuidadosa” de esta expresión nos permitirá intuir de forma sencilla la generalización de este resultado para cualquier red con cualquier número de mallas. En este ejemplo constituido por tres mallas tenemos:

- A la izquierda de la igualdad aparece un vector columna que contiene, en cada una de sus tres componentes, la suma de las fuerzas electromotrices de cada malla. En esta suma hay que tener en cuenta el criterio de signos.
- A la derecha aparece una matriz que de ahora en adelante denominaremos **matriz de resistencias** en la cual aparecen:
  - En la diagonal principal: el primer término contiene la suma de las resistencias de la malla 1, el segundo la suma de las resistencias de la malla 2 (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), etc., es decir, la suma de las resistencias de cada malla.
  - En los términos fuera de la diagonal principal: los términos (1,2) y (2,1) son iguales a las resistencias comunes a la malla 1 y 2 cambiadas de signo, de la misma forma que los elementos (2,3) y (3,2). Los elementos (1,3) y (3,1) son cero porque no hay ninguna resistencia común a las mallas 1 y 3.
- A continuación aparece un vector columna que contiene las intensidades de cada una de las mallas, es decir, las incógnitas a despejar.

A la vista del resultado obtenido anteriormente para el ejemplo expuesto con tres mallas, resulta sencillo su generalización para resolver una red cualquiera con cualquier número de mallas. La ecuación matricial para una red lineal plana constituida por  $n$  mallas será:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} & \cdots & -R_{1n} \\ -R_{21} & R_{22} & \cdots & -R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & -R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

En esta ecuación,

- $\varepsilon_i$  representa la suma de todas las fuerzas electromotrices y contraelectromotrices de la malla  $i$ , teniendo en cuenta el criterio de signos estudiado en el tema anterior.
- $R_{ii}$  es el sumatorio de todas las resistencias contenidas en la malla  $i$ .  $R_{ik}$  con  $i \neq k$ , es el sumatorio de todas las resistencias comunes a la malla  $i$  y a la  $k$ .

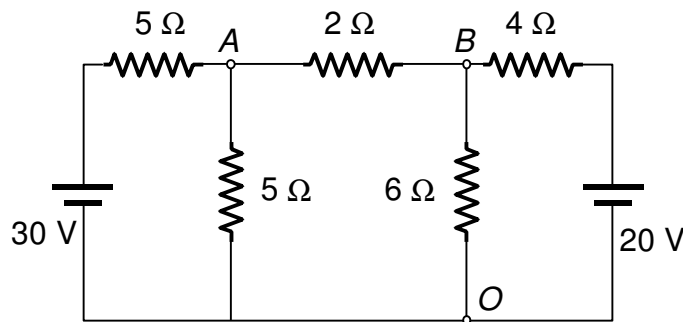
Observa que esta expresión representa un sistema de  $n$  ecuaciones (tantas ecuaciones como mallas tenemos en la red) y  $n$  incógnitas (tantas como intensidades de malla)

Una vez calculadas las intensidades de cada malla, se procede a calcular las intensidades de rama, teniendo en cuenta que la intensidad de las ramas que pertenecen a una única malla coincide con la intensidad de la malla, y en las ramas comunes a dos mallas, la intensidad es la resta de las intensidades de malla.

Como resumen, aquí tenemos un esquema con los pasos a seguir para resolver un circuito mediante la aplicación del método matricial de las corrientes de malla.

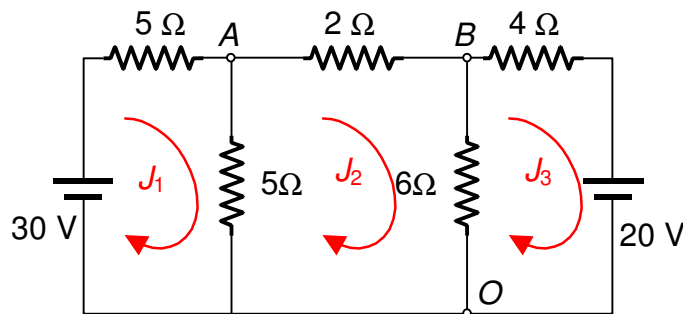
### Ejemplo 5-3

Calcula la intensidad que circula de  $A$  a  $B$ ,  $I_{AB}$ , y de  $B$  a  $O$ ,  $I_{BO}$ , por el método de las corrientes de malla.



*Solución*

La red no contiene generadores de intensidad, por lo que siguiendo el algoritmo expuesto anteriormente, pasamos al punto 2 y definimos las corrientes de malla  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$ .



A continuación, se plantea la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 13 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

que resolvemos despejando la matriz de intensidades:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 13 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,217 \\ 0,435 \\ -1,739 \end{pmatrix} \text{ A}$$

que nos proporciona directamente las tres intensidades de malla.  
O, aplicando la regla de Cramer para calcular  $J_2$  y  $J_3$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 30 & 0 \\ -5 & 0 & -6 \\ 0 & -20 & 10 \end{vmatrix}}{690} = 435 \text{ mA} \quad J_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 30 \\ -5 & 13 & 0 \\ 0 & -6 & -20 \end{vmatrix}}{690} = -1,739 \text{ A}$$

Con  $J_2$  tenemos la intensidad  $I_{AB}$ :

$$I_{AB} = J_2 = 435 \text{ mA}$$

$I_{BO}$  la obtenemos restando  $J_2$  y  $J_3$ , ya que  $I_{BO}$  tiene el mismo sentido que  $J_2$ .

$$I_{BO} = J_2 - J_3 = 2,174 \text{ A}$$

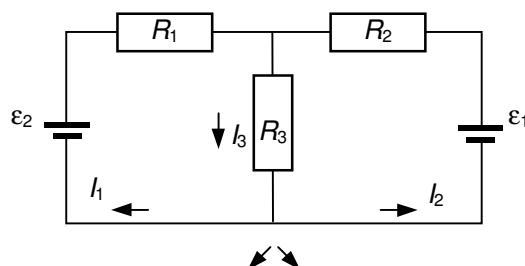
### 5.3 Principio de superposición

En muchas ocasiones resulta conveniente resolver un circuito con varios generadores en pasos sencillos eliminando uno o varios de los generadores. Esto se puede hacer aplicando el principio de superposición que dice que la intensidad del circuito completo es igual a la suma de las intensidades de los diferentes circuitos formados mediante la eliminación de todos los generadores menos uno de ellos.

Más concretamente, el principio de superposición se enuncia de la siguiente forma:

*La intensidad en una rama de un circuito lineal que contenga dos o más generadores es igual a la suma de las intensidades de dicha rama obtenidas para cada uno de los generadores por separado.*

Así, la red de la figura se puede resolver en dos etapas (a) y (b). En cada una hemos dejado únicamente un generador:



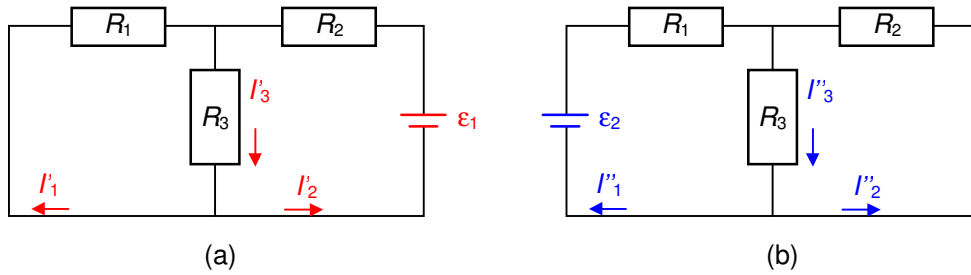


Figura 5-4. Principio de superposición

Una vez calculadas las intensidades parciales, las intensidades totales se obtienen sumando las intensidades parciales de (a) y (b):

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I'_1 + I''_1 \\
 I_2 &= I'_2 + I''_2 \\
 I_3 &= I'_3 + I''_3
 \end{aligned}$$

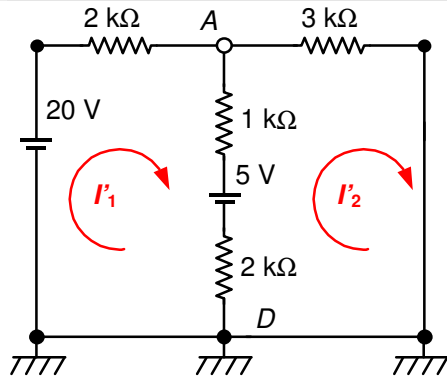
### Ejemplo 5-4

Calcula la intensidad de malla 1 ( $I_1$ ) del circuito de los ejemplos 7-1 y 7-3 aplicando el principio de superposición: para ello calcula la intensidad con los generadores de 20 V y 5 V, y después añade el generador de 10 V.

#### Solución

De forma esquemática el cálculo sería el siguiente

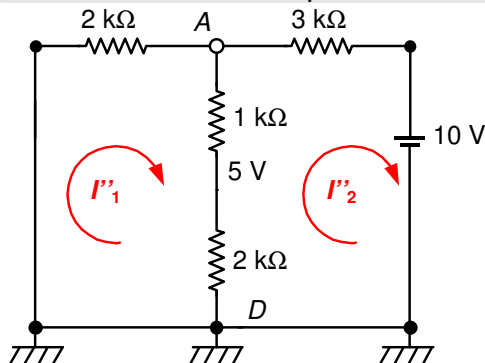
Red con los generadores de 20 V y 5 V



$$\begin{bmatrix} 20 - 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k + 1k + 2k & -1k - 2k \\ -1k - 2k & 2k + 1k + 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix}$$

$$I'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -3k \\ 5 & 6k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5k & -3k \\ -3k & 6k \end{vmatrix}} = \frac{35}{7} \text{ mA}$$

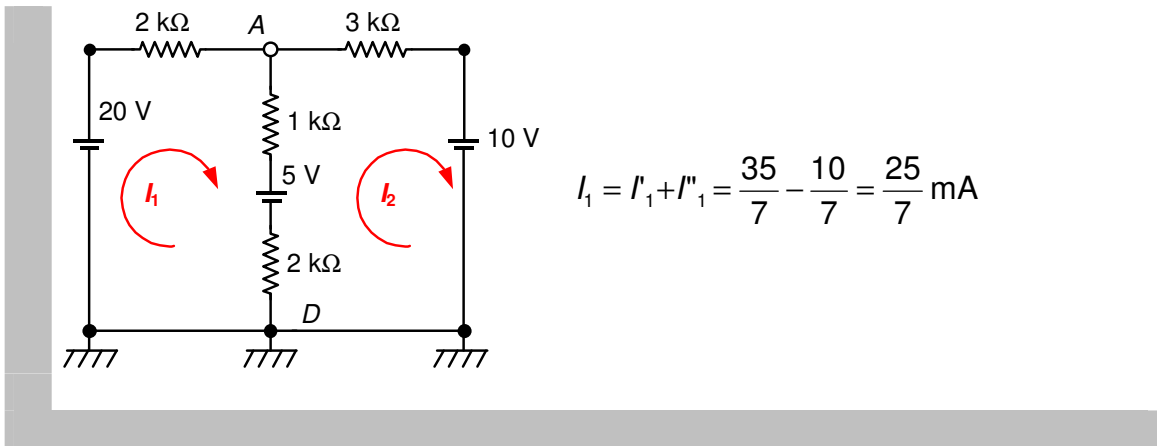
Red pasiva con el último generador de 10 V



$$\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k + 1k + 2k & -1k - 2k \\ -1k - 2k & 2k + 1k + 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix}$$

$$I''_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3k \\ -10 & 6k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5k & -3k \\ -3k & 6k \end{vmatrix}} = -\frac{10}{7} \text{ mA}$$

Red completa



### 5.4 Teorema de Thevenin

*Cualquier red lineal activa con terminales de salida A y B es equivalente a un generador de fuerza electromotriz  $\epsilon_T$  y resistencia  $R_T$ , donde  $\epsilon_T$  es la diferencia de potencial entre A y B y  $R_T$  la resistencia equivalente de la red pasiva entre A y B.*

Figura 5-5. Teorema de Thevenin

Esto significa que la respuesta entre dos puntos de una red activa es equivalente a un generador de tensión (generador de tensión no ideal, con una resistencia interna).

Este generador se denomina generador equivalente de Thevenin del circuito. La polaridad del generador equivalente de Thevenin es la indicada en la figura cuando la diferencia de potencial entre A y B es positiva ( $V_A - V_B > 0$ ), y la contraria cuando dicha diferencia de potencial es negativa ( $V_A - V_B < 0$ ).



## Teorema de Thevenin. Demostración

Para demostrar el teorema de Thevenin, conectamos una resistencia cualquiera  $R$  entre los puntos  $A$  y  $B$  de la red, y comprobamos que la intensidad que circula por dicha resistencia es la misma que la que circularía por esa resistencia conectada al generador equivalente de Thevenin de la red.

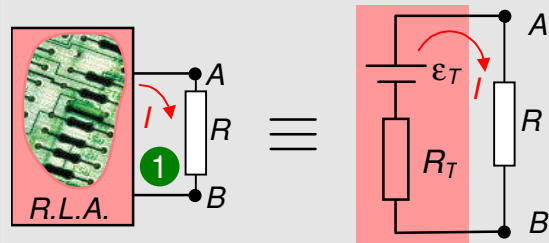


Figura 5-6. Red lineal activa y generador equivalente de Thevenin conectados a una resistencia  $R$

Para calcular la intensidad que circula por la resistencia  $R$  aplicamos el método de las mallas. Numeramos las mallas, de modo que la número 1 sea la malla que contiene a la resistencia  $R$ , tal y como indica la Figura 5-6.

De esta manera, la matriz de resistencias del circuito viene dada por:

$$\begin{pmatrix} R + R_{11} & -R_{12} & \cdots & -R_{1n} \\ -R_{21} & R_{22} & \cdots & -R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & -R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

Donde en el término (1,1) se ha expresado como suma de  $R$  más el resto de resistencias de la malla 1, denotadas estas últimas por  $R_{11}$ . Observa que la resistencia  $R$  únicamente aparece en este término de la matriz.

La intensidad que circula por la resistencia vendrá dada por:

$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i D_{i1}}{D}$$

Ecuación 5-3

El determinante de la matriz de resistencias  $D$  lo podemos desarrollar de la siguiente manera:

$$D = (R + R_{11})D_{11} - R_{12}D_{12} + \cdots$$

Siendo  $D_{ij}$  el determinante adjunto al elemento  $R_{ij}$ . De esta forma, la intensidad la podemos escribir del siguiente modo:

$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i D_{i1}}{(R + R_{11})D_{11} - R_{12}D_{12} + \cdots} = \frac{\sum_i \varepsilon_i D_{i1} / D_{11}}{R + (R_{11}D_{11} - R_{12}D_{12} + \cdots) / D_{11}}$$

Ecuación 5-4

En esta expresión,

$$(R_{11}D_{11} - R_{12}D_{12} + \cdots) / D_{11}$$

es la resistencia equivalente de la red entre los puntos  $A$  y  $B$ , y

$$\sum_i \varepsilon_i D_{i1} / D_{11}$$

es la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  de la red original (sin la resistencia  $R$ ).

Para comprobar esta última afirmación, mediante la Ecuación 5-3, la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  de la red con la resistencia  $R$  de la Figura 5-6 viene dada por

$$V_{AB} = R \sum_i \varepsilon_i \frac{D_{i1}}{D}$$

La diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$  en la red activa original es el límite de esta diferencia de potencial cuando  $R$  sea muy grande:

$$V_{AB} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( R \sum_i \varepsilon_i \frac{D_{i1}}{D} \right) = \sum_i \varepsilon_i \frac{D_{i1}}{D_{11}}$$

pues para valores altos de  $R$ ,  $D$  tiende a  $RD_{11}$ .

Por lo que la Ecuación 5-4 queda:

$$I = \frac{V_{AB}}{R + R_{AB}} = \frac{\varepsilon_T}{R + R_T}$$

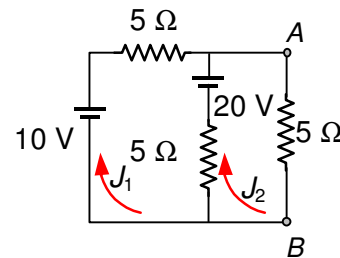
que es la misma intensidad que hubiésemos obtenido a partir del generador equivalente de Thevenin.

### Ejemplo 5-5

Calcula el generador equivalente de Thevenin entre  $A$  y  $B$  del circuito de la figura.

*Solución*

Primero calculamos la resistencia equivalente de la red pasiva. Utilizamos el método explicado anteriormente:



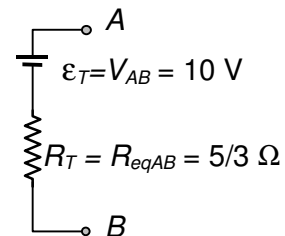
$$R_{eqAB} = \frac{|D|}{|D_{11}|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{500 - (125 + 250)}{100 - 25} = \frac{5}{3} \Omega$$

Ahora calculemos la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$ . Necesitamos calcular la intensidad de la malla 2 de la red, y aplicamos el método de las mallas para al cálculo:

$$\begin{bmatrix} -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -10 \\ -5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{200 - 50}{75} = 2 \text{ A}$$

$$V_{AB} = J_2 \cdot 5 \Omega = 10 \text{ V}$$

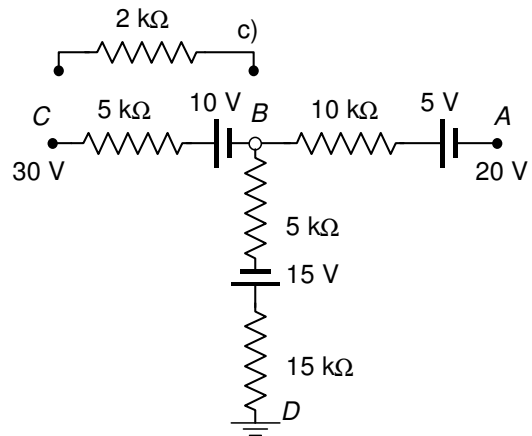
El generador de Thevenin con su polaridad quedará como en la figura.



### Ejemplo 5-6

Dado el circuito de la figura,

- Determina las intensidades mediante el método de las mallas.
- Calcula la resistencia equivalente entre  $C$  y  $B$ .
- Determina el generador equivalente de Thevenin entre  $C$  y  $B$ , y calcula la intensidad de corriente que circularía por una resistencia de  $2\text{ k}\Omega$  que conectásemos entre  $C$  y  $B$ .

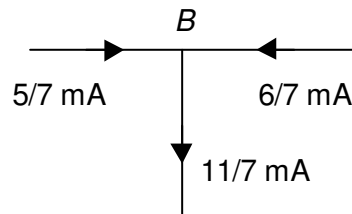


### Solución

- Determinamos las intensidades usando las leyes de kirchoff. Por comodidad, utilizaremos el  $\text{k}\Omega$  como unidad de resistencia, y como consecuencia las intensidades se obtendrán en  $\text{mA}$ .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 30 - 10 + 15 \\ 20 + 5 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{5}{7} \text{ mA} = 0,71 \text{ mA} \quad I_2 = \frac{11}{7} \text{ mA} = 1,57 \text{ mA} \quad I_3 = \frac{6}{7} \text{ mA} = 0,86 \text{ mA}$$



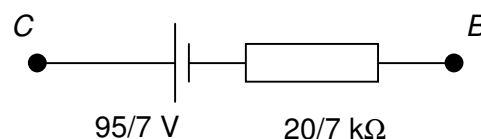
- Entre  $C$  y  $B$  tenemos las tres resistencias en paralelo, por lo que la equivalente vale:

$$R_{eq} = (5^{-1} + 20^{-1} + 10^{-1})^{-1} = \frac{20}{7} \text{ k}\Omega$$

- Recorriendo la rama de  $C$  a  $B$  obtenemos  $V_{CB}$ :

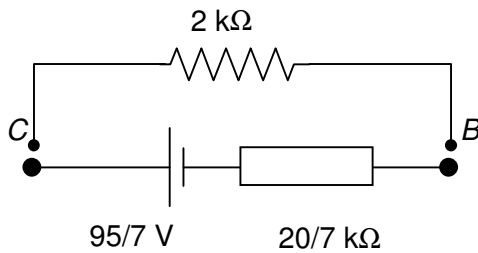
$$V_{CB} = \sum iR - \sum \varepsilon = (5/7) \cdot 5 + 10 = 95/7 \text{ V} = 13,6 \text{ V}$$

El generador equivalente de Thevenin queda entonces:





De este modo, al añadirle una rama, la intensidad que circularía por la resistencia de  $2\text{ k}\Omega$  es por tanto:

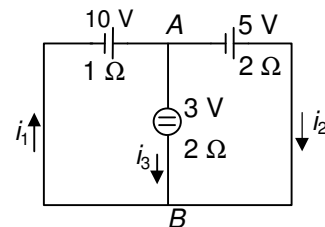


$$i = \frac{95/7}{20/7 + 2} = \frac{95}{34} \text{ mA} = 2,79 \text{ mA}$$

## 5.5 Problemas

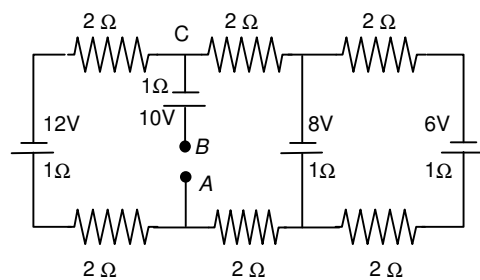
1. En el circuito de la figura, calcula las intensidades en las tres ramas y la diferencia de potencial entre los bornes del motor.

Sol:  $i_1 = 5,5 \text{ A}$ ;  $i_2 = 4,75 \text{ A}$ ;  $i_3 = 0,75 \text{ A}$ ;  $V_{AB} = 4,5 \text{ V}$



2. Halla la diferencia de potencial entre A y B.

Sol:  $-0,20 \text{ V}$

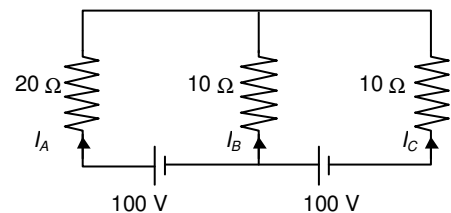


3. Halla  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$  en el circuito de la figura.

Sol:  $I_A = 6 \text{ A}$

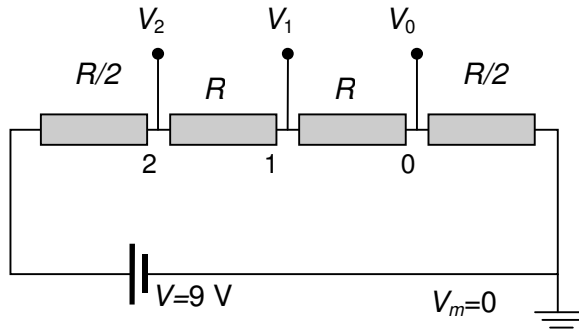
$I_B = 2 \text{ A}$

$I_C = -8 \text{ A}$



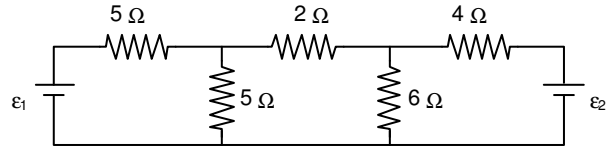
4. El esquema de la figura representa el divisor resistivo de un convertidor analógico - digital. Calcula las tensiones intermedias  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ .

Sol:  $V_2 = 7,5 \text{ V}$ ,  $V_1 = 4,5 \text{ V}$ ,  $V_0 = 1,5 \text{ V}$



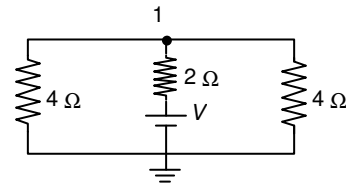
5. En el circuito de la figura,  $\varepsilon_1 = 30 \text{ V}$ , halla  $\varepsilon_2$  para que la intensidad que pasa por la resistencia de  $2 \Omega$  sea nula.

Sol:  $\varepsilon_2 = 25 \text{ V}$



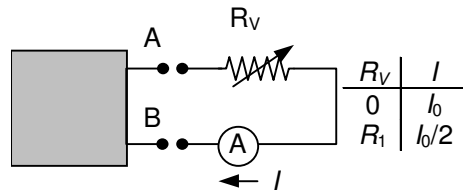
6. En el circuito de la figura, halla la tensión  $V$  para que la tensión en el nudo 1 sea  $50 \text{ V}$ .

Sol:  $V = 100 \text{ V}$



### Teoremas de equivalencia

7. Sea un circuito lineal activo con terminales de salida  $A$  y  $B$ : Se conecta una rama con una resistencia variable  $R_V$  y un amperímetro de resistencia interna despreciable. Cuando  $R_V = 0$ ,  $I = I_0$ , y cuando  $R_V = R_1$ ,  $I = I_0/2$ . Determina, razonando la respuesta:



a)  $\varepsilon_T$  y  $R_T$  del generador equivalente de Thevenin.

Sol: a)  $\varepsilon_T = I_0 R_1$ ,  $R_T = R_1$

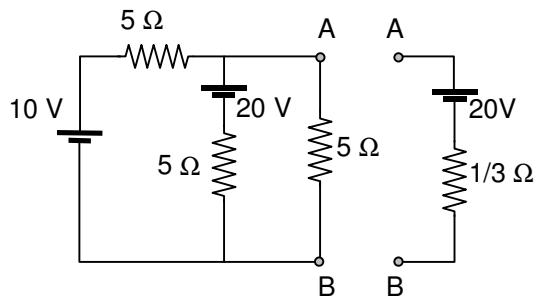
8. En el circuito de la figura se pide:

a) Generador equivalente de Thevenin entre  $A$  y  $B$

b) Si se conecta la rama de la derecha a  $A-B$ , indica si el elemento de fem =  $20 \text{ V}$  consume o genera potencia y calcula su valor.

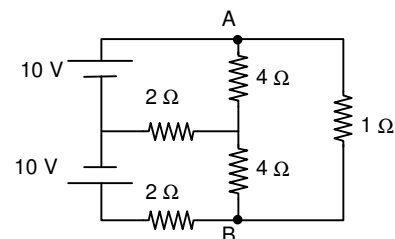
Sol: a)  $\varepsilon_T = 10 \text{ V}$ ,  $R_T = 5/3 \Omega$ ;

b) Potencia generada =  $100 \text{ W}$

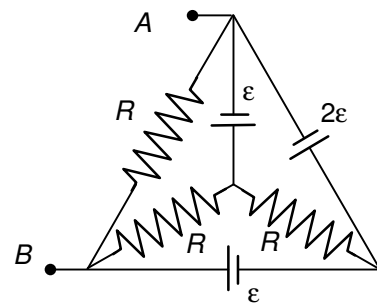


9. En el circuito de la figura, halla la intensidad que pasa por la resistencia  $R = 1 \Omega$ , aplicando el teorema de Thevenin entre  $A$  y  $B$ .

Sol:  $I = 20/27 \text{ A}$

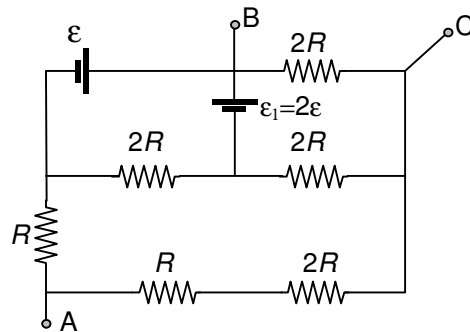


10. En el circuito de la figura, calcula: a) Generador equivalente de Thevenin ( $\varepsilon_T$ ,  $R_T$ ) entre A y B.  
 b) Potencia generada o recibida por un generador real de fem  $\varepsilon$  y resistencia interna  $R$ , al conectar su polo negativo al borne A y su polo positivo al borne B del circuito anterior.



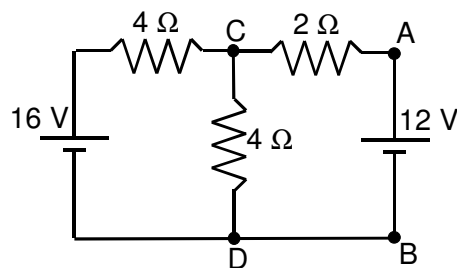
Sol: a)  $\varepsilon_T = 3\varepsilon$ , (B es el polo +),  $R_T = 0$ ;  
 b)  $P = 6\varepsilon^2 / R$

11. En el circuito de la figura, calcula:  
 a) La diferencia de potencial entre A y B,  
 b) Resistencia equivalente entre A y C,  
 c) Potencia en el elemento  $\varepsilon_1$  (decir si es generada o consumida).



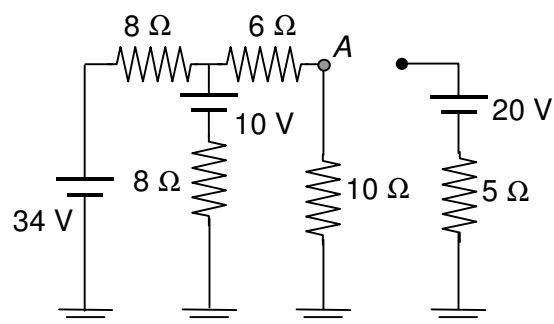
Sol: a)  $V_{AB} = -\varepsilon$ , b)  $R = 6R/5$ , c)  $P = 2\varepsilon^2/R$

12. Dado el circuito de la figura:  
 a) Calcula la intensidad que circula del punto A al punto B.  
 b) Calcula la potencia disipada por la resistencia situada en la rama CD.  
 c) Encuentra el equivalente de Thevenin entre C y D, indicando claramente su polaridad.  
 d) Si se le añade al circuito una resistencia de  $9\ \Omega$  entre los puntos C y D, utilizando el equivalente de Thevenin, calcula la intensidad que circularía por dicha resistencia.



Sol: a) 1 A, b) 25 W,  $\varepsilon_T = 10\text{ V}$ ,  $R_T = 1\ \Omega$ , d) 1 A

13. En el circuito de la figura, calcula:  
 a) la resistencia equivalente del circuito entre los puntos A y tierra.  
 b) la tensión en el punto A y el equivalente Thevenin del circuito entre los puntos A y tierra.  
 c) La intensidad que circularía por la rama del generador de 20 V si se conectara al punto A.



Sol: a)  $5\ \Omega$ , b)  $\varepsilon_T = 11\text{ V}$ ,  $R_T = 5\ \Omega$ , c) 0,9 A

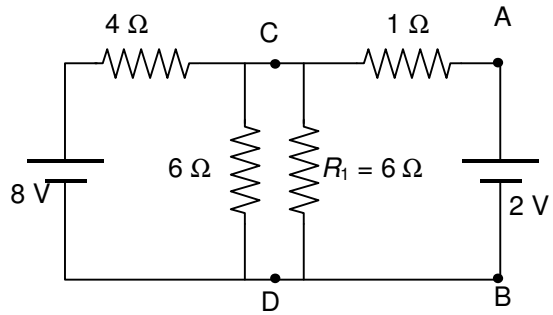
14. Dado el circuito de la figura:

a) Calcula la intensidad que circula del punto A al B.

b) Calcula la potencia disipada por la resistencia  $R_1$ .

c) Encuentra el equivalente de Thevenin entre C y D, indicando claramente su polaridad.

d) Si se le añade al circuito una resistencia de  $5 \Omega$  entre los puntos C y D, utilizando el equivalente de Thevenin, calcula la intensidad que circularía por dicha resistencia.



a) Sol:  $26/19 \text{ A}$ , b)  $1,06 \text{ W}$ ,  $\varepsilon_T = 48/19 \text{ V}$ ,  $R_T = 12/19 \Omega$ , d)  $48/107 \text{ A}$ .

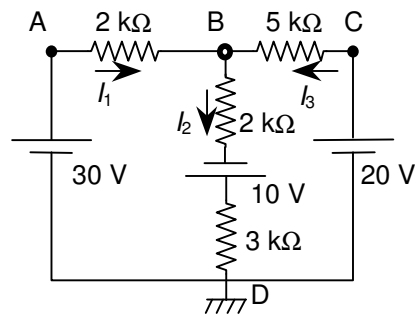
15. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$  mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Calcula el potencial en el punto B.

c) Calcula la potencia disipada en las resistencias del circuito.

d) Determina si el generador de 10 V actúa como un generador o receptor, y qué potencia suministra o acumula.

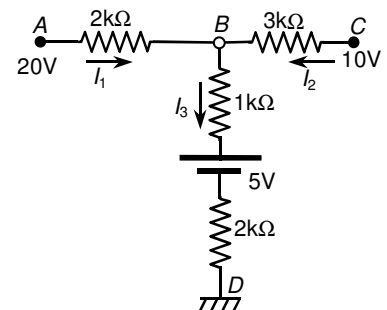


Sol: a)  $5,56 \text{ mA}$ ,  $5,78 \text{ mA}$ ,  $0,22 \text{ mA}$  b)  $18,9 \text{ V}$

16. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$  mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Calcula el potencial en el punto B.

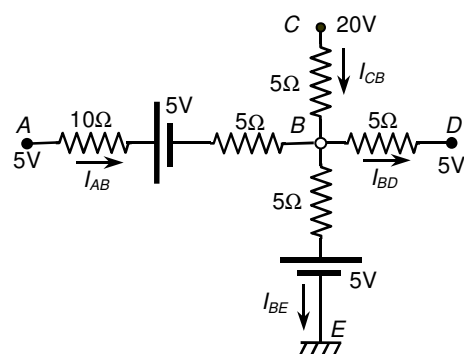


Sol: a)  $I_1 = \frac{25}{7} \text{ mA}$   $I_2 = \frac{-20}{21} \text{ mA}$   $I_3 = \frac{55}{21} \text{ mA}$  b)  $V_B = \frac{90}{7} \text{ V}$

17. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_{AB}$ ,  $I_{CB}$ ,  $I_{BD}$ , e  $I_{BE}$  mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Calcula el potencial en el punto B.

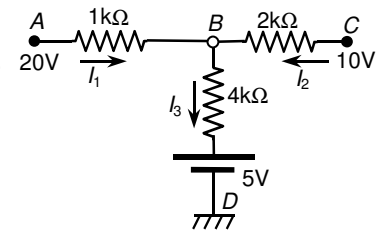


Sol: a)  $I_{AB} = -3/5 \text{ A}$   $I_{CB} = 11/5 \text{ A}$   $I_{BD} = 4/5 \text{ A}$   $I_{BE} = 4/5 \text{ A}$  b)  $V_B = 9 \text{ V}$

18. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$  mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Calcula el potencial en el punto  $B$ .

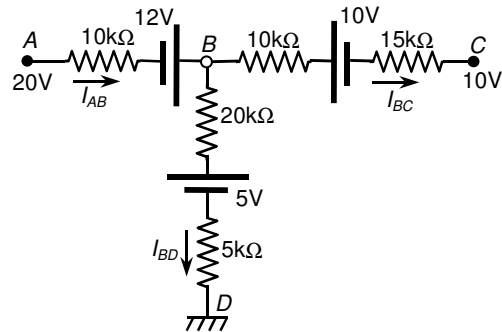


Sol: a)  $I_1 = 5 \text{ mA}$      $I_2 = -5/2 \text{ mA}$      $I_3 = 5/2 \text{ mA}$   
 b)  $V_B = 15 \text{ V}$ .

19. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_{AB}$ ,  $I_{BD}$ , e  $I_{BC}$  mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Calcula el potencial en el punto  $B$ .

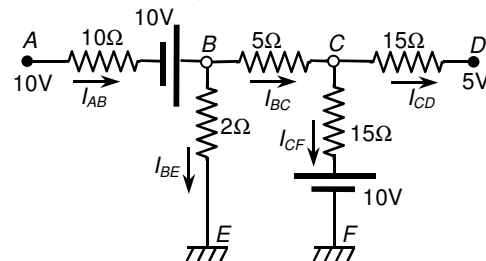


Sol: a)  $I_{AB} = 13/15 \text{ mA}$      $I_{BC} = 2/15 \text{ mA}$   
 $I_{BD} = 11/15 \text{ mA}$     b)  $V_B = 70/3 \text{ V}$ .

20. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_{AB}$ ,  $I_{BE}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{CF}$  y  $I_{CD}$  mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Calcula el potencial en el punto  $B$ .



Sol:

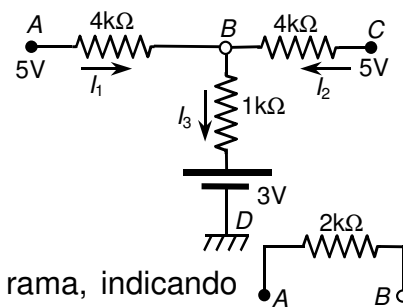
a)  $I_{AB} = 55/34 \text{ A}$      $I_{BE} = 65/34 \text{ A}$      $I_{BC} = -5/17 \text{ A}$      $I_{CF} = -16/51 \text{ A}$      $I_{CD} = 1/51 \text{ A}$   
 b)  $V_B = 65/17 \text{ V}$      $V_C = 90/17 \text{ V}$

21. Dado el circuito de la figura,

a) Determina las intensidades de rama  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$  mediante las reglas de Kirchhoff.

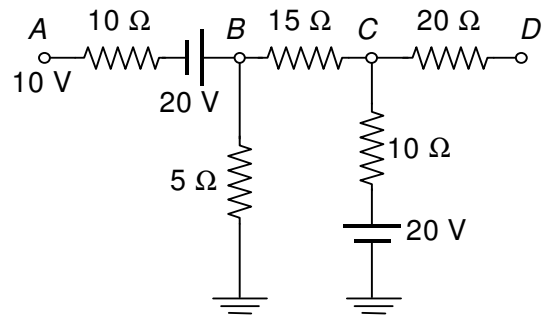
b) Calcula el generador equivalente de Thevenin entre los puntos  $A$  y  $B$ . Indica claramente su polaridad.

c) En paralelo a los puntos  $A$  y  $B$  del circuito se añade la rama de la figura, con una resistencia de  $2 \text{ k}\Omega$ . Calcula la intensidad que circula por dicha rama, indicando claramente su sentido.



Sol: a)  $I_1 = 0,333 \text{ mA}$ ;     $I_2 = 0,333 \text{ mA}$ ;     $I_3 = 0,666 \text{ mA}$ ;  
 b)  $V_{AB} = 4/3 \text{ V}$      $R_{eq} = 2/3 \text{ k}\Omega$     c)  $I = 0,5 \text{ mA}$ .

- 22.** Dado el circuito de la figura,  
 a) Determina las intensidades de rama  $I_{AB}$ ,  $I_{B-TIERRA}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{C-TIERRA}$  y  $I_{CD}$ .  
 b) Calcula el potencial en el punto  $D$ .  
 c) Generador equivalente de Thevenin entre el punto  $D$  y tierra, indicando claramente su polaridad.  
 d) ¿Qué corriente circularía por un receptor de 10 V de fuerza contraelectromotriz que se conectase entre  $D$  y tierra?



**Sol:** a)  $I_{AB} = 32/17$  A;  $I_{BC} = I_{C-TIERRA} = -6/17$  A;  $I_{B-TIERRA} = 38/17$  A;  $I_{CD} = 0$ ;  
 b)  $V_D = 280/17$  V; c)  $\varepsilon_T = 280/17$  V;  $R_T = 450/17$   $\Omega$ ; d)  $i = 11/45$  A

## GLOSARIO

**Dipolo.** Cualquier elemento eléctrico con dos terminales.

**Red eléctrica.** Conjunto de dipolos asociados entre sí y formando circuitos cerrados interconectados.

**Nudo.** Punto de una red donde concurren tres o más conductores.

**Rama.** Tramo de circuito entre dos nudos consecutivos.

**Malla.** Circuito cerrado formado por ramas, de tal modo que partiendo de un punto y siguiendo un sentido, se pueda volver a él pasando sólo una vez por cada rama

**Ley de los nudos.** La suma algebraica de las intensidades que entran en un nudo es cero.

**Ley de las mallas.** La suma de las caídas de tensión en todas las ramas de una malla es cero.

**Teorema de Thevenin.** Cualquier circuito lineal activo con terminales de salida  $A$  y  $B$  es equivalente a un generador de fuerza electromotriz  $\varepsilon_T$  y resistencia  $R_T$ , donde  $\varepsilon_T$  es la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$  en circuito abierto y  $R_T$  la resistencia equivalente de la red pasiva entre  $A$  y  $B$ .