



EXAMEN DE TEORÍA DE FFI

26 de enero de 2007



Nombre y apellidos:

Grupo:

1. Enuncia la ley de Coulomb. Enuncia el Principio de Superposición aplicado a la fuerza que ejercen un conjunto de n cargas puntuales sobre una carga q_0 .

Ley de Coulomb:

Dos cargas eléctricas puntuales q_1 y q_2 , en reposo, separadas una distancia r en el vacío, se ejercen entre sí una fuerza cuyo módulo es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, cuya dirección es la de la recta que las une y es repulsiva si son del mismo signo y atractiva si son de signo contrario.

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{r12}$$

Principio de Superposición:

Dada una distribución de cargas q_i actuando sobre una carga q , la fuerza total sobre q es la suma vectorial de las fuerzas que ejerce cada una de ellas sobre dicha carga

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

2. Calcula el trabajo necesario para alejar una carga puntual q situada a una distancia r de otra carga puntual Q hasta una distancia infinita.

$$W_{r\infty} = -q(V_\infty - V_r) = qV_r = \frac{kqQ}{r}$$

Este trabajo es realizado por la fuerza eléctrica de la carga Q sobre q .

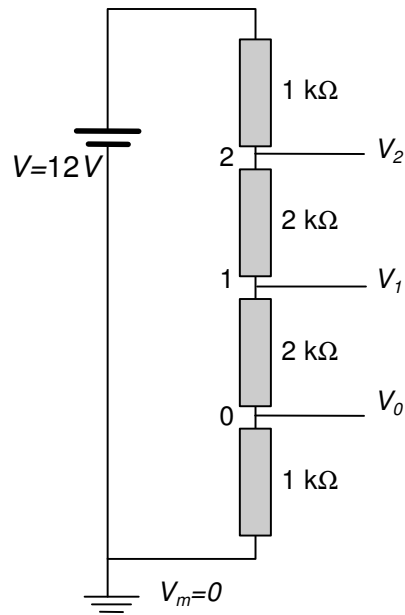
3. El esquema de la figura representa el divisor resistivo de convertidor analógico - digital. Calcula las tensiones inter- V_0 , V_1 , V_2 .

$$I = 12 / 6 = 2 \text{ mA}$$

$$V_0 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ V}$$

$$V_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ V}$$

$$V_0 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ V}$$



4. Deduce la expresión de la resistencia equivalente de un conjunto de n resistencias asociadas en paralelo.

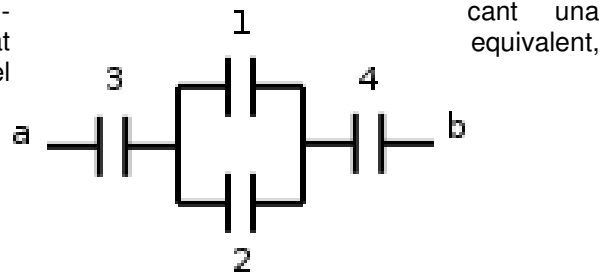
En la asociación en paralelo, la diferencia de potencial es la misma en todas las resistencias, y en cambio, la intensidad es diferente como consecuencia de producirse una derivación, es decir, una separación de las cargas que fluyen por distintos caminos. Así la intensidad general, o intensidad en la entrada es la suma de las intensidades en cada rama:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Si se aplica la ley de Ohm en esta resistencia, se tiene que:

$$\frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \dots + \frac{V_{AB}}{R_n}; \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \text{ es decir, } \frac{1}{R_{eq}} = \sum_1^n \frac{1}{R_i}$$

5. Carreguem l'associació de condensadors de la figura aplicant una tensió $V_{ab} = 11 \text{ V}$ entre els punts a i b . Calcula la capacitat l'energia emmagatzemada en el sistema y la càrrega Q_3 del condensador 3.



Capacidad equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{4} = \frac{12}{12} \Rightarrow C_{eq} = \frac{12}{11} \mu F = 1,09 \mu F$$

Energía almacenada:

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V_{ab}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{11} \cdot 11^2 = 66 \mu J$$

Al estar en serie, la carga del condensador 3 coincide con la carga total almacenada:

$$Q_3 = Q_T = C_{eq} V_{ab} = \frac{12}{11} \cdot 11 = 12 \mu C$$

6. Dado el circuito de la figura, calcula la corriente que circula por el diodo aplicando las tres aproximaciones del diodo.

Primera aproximación:

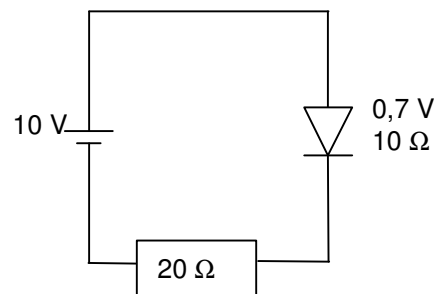
$$i_1 = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ A}$$

Segunda aproximación:

$$i_2 = \frac{10 - 0,7}{20} = \frac{9,3}{20} = 0,465 \text{ A}$$

Tercera aproximación:

$$i_3 = \frac{10 - 0,7}{20 + 10} = \frac{9,3}{30} = 0,31 \text{ A}$$



7. Justifica, utilizando el modelo de las bandas de energía, el diferente comportamiento de la conductividad de un semiconductor frente a la temperatura según éste sea intrínseco o extrínseco, indicando en un gráfico dicho comportamiento.

Al aumentar la temperatura de un semiconductor, la concentración intrínseca aumenta, por lo que tendremos una mayor concentración de pares electrón–hueco. De este modo, es de esperar un aumento en la conductividad. El efecto está representado en el siguiente gráfico para el germanio puro.

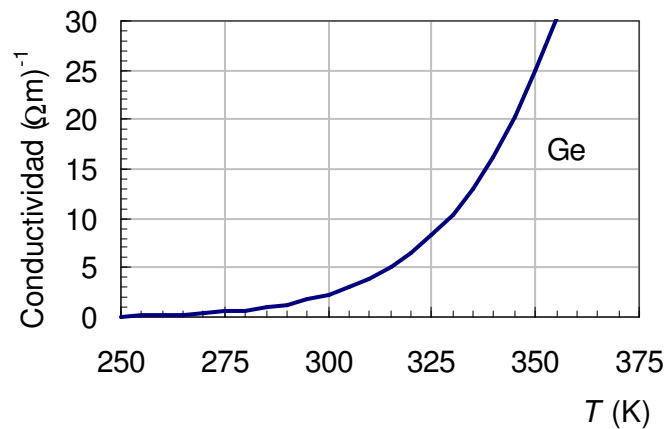


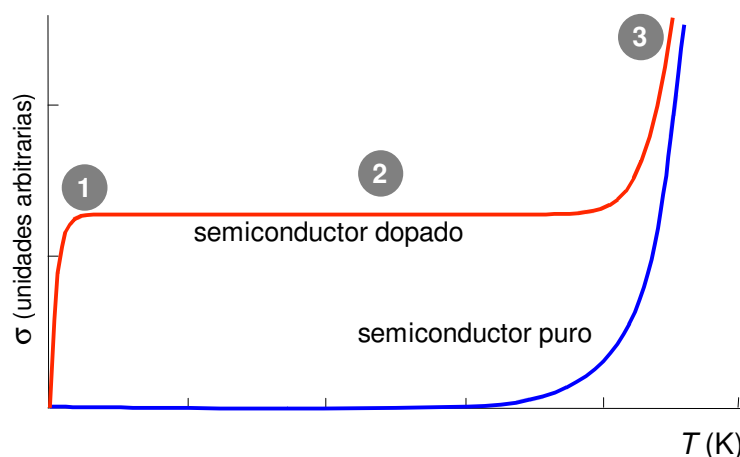
Figura **¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.**-1. Influencia de la temperatura en la conductividad

Si en lugar de tratarse de un semiconductor puro, éste se encuentra dopado, la situación es distinta por la presencia de impurezas. El comportamiento está descrito en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** en el que es posible apreciar tres zonas:

1. En el cero absoluto de temperatura (0 K), todos los electrones están ligados a sus átomos, y por tanto no hay portadores de carga libres, y la conductividad es nula. En los semiconductores dopados, al aumentar la temperatura ligeramente por encima de 0 K, los átomos de impurezas ya se ionizan por tener una energía de ionización muy pequeña; por lo tanto, tendremos una concentración de portadores significativa que posibilita la conducción, incluso a temperaturas próximas al cero absoluto (0 K). De este modo, la curva sube muy rápidamente.

En el semiconductor puro no se ha alcanzado todavía la temperatura en la cual se produce la ionización de los átomos del semiconductor, y por tanto la conductividad es prácticamente nula.

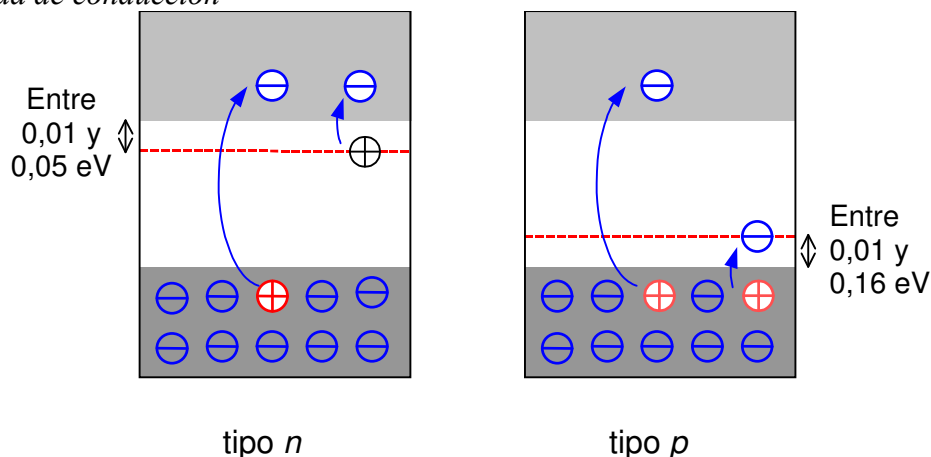
2. Al aumentar la temperatura, la conductividad no aumenta de modo sensible, pues ya se han ionizado todas las impurezas en los semiconductores dopados, y el único proceso que aporta nuevos portadores de carga libres es la generación térmica de pares electrón–hueco. Los pares electrón–hueco generados térmicamente son cuantitativamente insignificantes a temperaturas menores o próximas a la temperatura ambiente (300 K), tanto para semiconductores dopados como puros.



3. Si la temperatura alcanza valores más altos, los pares electrón–hueco generados térmicamente empiezan a ser lo suficientemente significativos como para que su número sea comparable o mayor a los que teníamos procedentes de las impurezas. De este modo, la conductividad, que se había mantenido estable, aumenta ahora como consecuencia de los pares electrón–hueco generados térmicamente. Por lo tanto, a temperaturas muy altas el comportamiento del semiconductor dopado y el puro tiende a confundirse.

Cuando añadimos impurezas donadoras a un material semiconductor, en las proximidades de

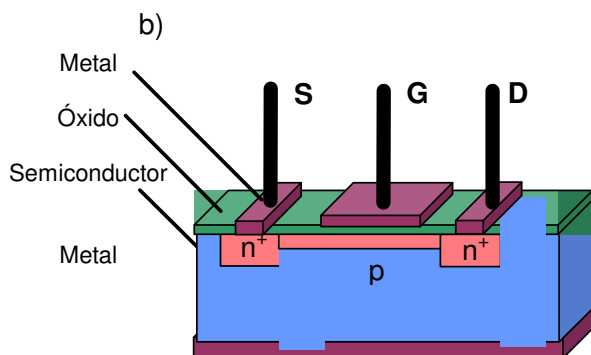
la banda de conducción aparece una nueva banda muy estrecha donde se sitúan los electrones adicionales de los átomos donadores. La energía de estos electrones se encuentra muy cerca del nivel inferior de la banda de conducción



Si dopamos un semiconductor con impurezas aceptoras, en las proximidades de la banda de valencia aparece una nueva banda muy estrecha vacía. Algunos electrones de la banda de valencia pueden pasar a estos niveles aceptores, dejando huecos en la banda de valencia. Estos huecos son los responsables de la conducción en el material.

8. Describe la estructura física de un MOS-FET de agotamiento y explica su comportamiento para diferentes tensiones en los terminales.

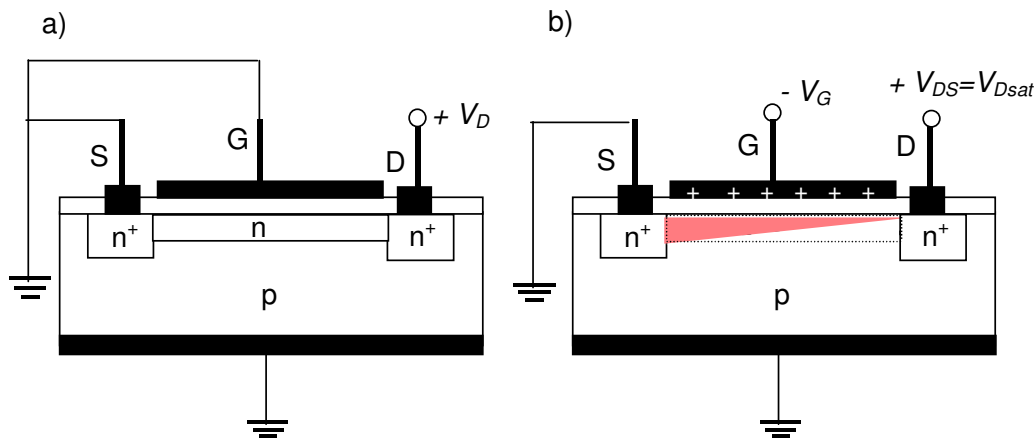
Sobre un sustrato de un semiconductor extrínseco de tipo p , aparecen dos zonas con un dopado fuerte de tipo n que se unirán a través de un conductor a dos terminales de salida (el Drenador, D, y la Fuente, S). Una capa de material dieléctrico (óxido) se situará entre el cristal semiconductor y una placa conductora que se conectará al tercer terminal del transistor (la Puerta, G), situada entre los otros dos terminales y tal como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** Los tres terminales se sitúan en una de las caras del semiconductor, mientras que en la otra se introduce un contacto metálico. Si ambas zonas fuertemente dopadas con átomos donadores se unen por un canal dopado también con átomos donadores, tenemos un transistor MOS-FET de *agotamiento*



Estructura física de un transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor de agotamiento

se pueden diseñar también con sustratos de semiconductor de tipo n , siendo su comportamiento similar al que se describe continuación para el caso en que el sustrato sea de tipo p .

el comportamiento del transistor **MOS-FET de agotamiento** e se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** hay que tener en cuenta que el canal que permite el paso de corriente eléctrica entre el Drenador y la Fuente existe desde el primer momento, por lo que siendo nula la tensión de puerta, al introducir una diferencia de potencial entre Drenador y Fuente circulará una corriente eléctrica



MOS-FET de agotamiento. a) con tensión de puerta nula; b) con una tensión de puerta distinta de cero y una vez alcanzado el punto de saturación

Aún con tensiones negativas de puerta, en la medida en que el canal entre Drenador y Fuente siga existiendo, podrá circular corriente, siendo esta la principal diferencia entre el MOS-FET de agotamiento y el de enriquecimiento. Pero una tensión negativa en la Puerta supone una disminución de electrones en el canal, pudiéndose llegar a tensiones negativas lo suficientemente altas como para dar lugar a la desaparición del canal y, por lo tanto, a que la intensidad entre Drenador y Fuente sea nula. Si la tensión de puerta es positiva supone un incremento de la carga negativa en el canal y, consecuentemente, un reforzamiento del canal.

Por otra parte, y para una tensión de puerta dada, la aplicación de una tensión de drenador da lugar a un comportamiento similar al visto para el MOS-FET de enriquecimiento. Al ir incrementando la tensión de drenador, se llega al estrangulamiento del canal y al valor de saturación de la intensidad. El valor de la intensidad de saturación depende de la tensión de puerta, cuanto mayor sea esta mayor será la intensidad, siendo nula para valores negativos suficientemente altos de la tensión de puerta.

Al transistor descrito, con un sustrato de tipo p , se le denomina MOS-FET de agotamiento de canal n . Si el sustrato fuese de tipo n , la denominación es denomina MOS-FET de agotamiento de canal p y su comportamiento sería similar al descrito, introduciendo las correcciones correspondientes en cuanto a diseño físico y polaridad aplicada.

- | | |
|--|--|
| <p>9. a) Define el momento magnético \vec{m} de una bobina. b) Calcula dicho momento magnético para una bobina circular de radio 0,5 m, 30 espiras, situadas paralelas al plano XY, por la que circula una intensidad de 2 A., sentido horario. c) Si se aplica un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{i}$ ¿Qué efecto tendrá sobre la bobina?</p> | <p>a) Defineix el moment magnètic d'una bobina. b) Calcula tal moment magnètic per a una bobina circular de radi 0,5 m, 30 espiras, situades paral·leles al pla XY, per la que circula una intensitat de 2 A amb sentit horari. c) Si s'aplica un camp magnètic $\vec{B} = B\vec{i}$ ¿quin efecte tindrà sobre la bobina?</p> |
|--|--|

a) El vector momento magnético de una espira se define como el producto de la intensidad de corriente por el vector superficie de la espira, con dirección perpendicular a la espira y el sentido se obtiene al aplicar la regla de la mano derecha siguiendo el sentido de la intensidad.

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

b) $\vec{m} = NI\vec{S} = 30 \cdot 2 \cdot \pi 0,5^2 = 15\pi(-\vec{k})(Am^2)$

c) Al aplicar un campo magnético la espira se ve sometida a un par de fuerzas que la harán girar en sentido antihorario hasta que el momento magnético sea paralelo al campo magnético aplicado. El momento del par de fuerzas será:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -15\pi \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = -15\pi B \vec{j} (\text{Nm})$$

10. Por un circuito compuesto por dos elementos puros en serie alimentados por una fuente de tensión $u(t) = 100 \cos(500t + 10^\circ)$ V, circula una intensidad de corriente $i(t) = 20 \cos(500t + 30^\circ)$ A, determina la tensión instantánea en bornes de ambos elementos.

$$u(t) = 100 \cos(500t + 10^\circ) \text{ V} \quad i(t) = 20 \cos(500t + 30^\circ) \text{ A}$$

El desfase tensión –intensidad nos dice los dos elementos que se tratan.

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 10^\circ - 30^\circ = -20^\circ$, que observando el triángulo de impedancias, obtenemos que son una resistencia y un condensador.

El valor de la impedancia será: $Z = \frac{U_M}{I_M} = \frac{100}{20} = 5\Omega$

Del triángulo de impedancia obtenemos:

$$R = Z \cos \varphi = 0,94\Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = Z \sin \varphi = 1,71\Omega$$

La tensión instantánea en bornes de la resistencia será:

$$u_R(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = 1,88 \cos(500t + 30^\circ), \text{ en fase con la intensidad.}$$

y la tensión en bornes del condensador:

$$u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_C) = 3,42 \cos(500t - 60^\circ) \text{ al estar retrasada } 90^\circ \text{ respecto a la intensidad.}$$



EXAMEN DE PROBLEMAS DE FFI

26 de enero de 2007

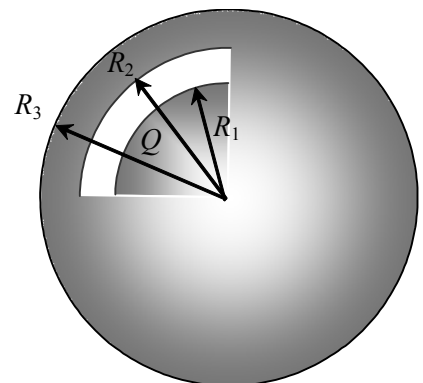


Nombre y apellidos:

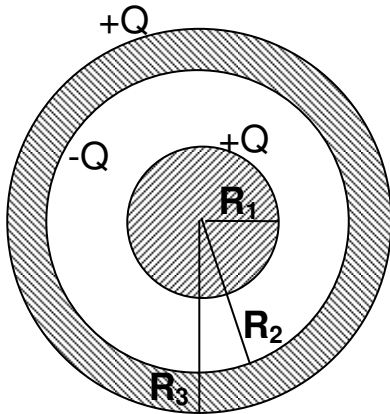
Grupo:

1. Sea un conductor esférico hueco de radio interno R_2 y radio externo R_3 en cuyo interior se sitúa otro conductor esférico macizo de radio externo R_1 . El conductor interno está cargado con una carga total Q , y el externo tiene carga total nula. Calcula:

- Las densidades superficiales de carga en las superficies de los conductores.
- El campo eléctrico en todas las regiones del espacio: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, $r > R_3$.
- La diferencia de potencial entre los puntos $r = R_1$ y $r = R_2$.
- Dicho sistema constituye un condensador con simetría esférica. Calcula la capacidad de dicho condensador.
- A continuación se rellena el espacio entre los dos conductores con aceite, cuya constante dieléctrica relativa es igual a 2. ¿Cómo varía la capacidad del condensador, la diferencia de potencial entre los puntos R_1 y R_2 , y el campo eléctrico en $R_1 < r < R_2$?



Solución:



a) Densidades superficiales de carga

La carga Q del conductor 1 está distribuida por su superficie por ser conductor.

$$\sigma_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

Esta carga Q induce, por influencia, una carga -Q en la superficie de radio

$$R_2: \sigma_2 = \frac{-Q}{S_2} = \frac{-Q}{4\pi R_2^2}$$

Y como el conductor exterior es neutro aparecerá una carga Q en la super-

ficie exterior de radio R_3 :
$$\sigma_3 = \frac{Q}{S_3} = \frac{Q}{4\pi R_3^2}$$

b) Campo eléctrico en todas las regiones. Puede resolverse aplicando el Teorema de Gauss. (También podría hacerse por superposición de los campos creados por las 3 superficies esféricas en cada región)

$r < R_1$: Consideremos como superficie gaussiana una esfera de radio $r < R_1$:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} = 0, \Rightarrow E = 0$$

Además, dentro de un conductor en equilibrio $E=0$

$$R_1 < r < R_2: \phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$R_2 < r < R_3$: Dentro del conductor $E = 0$

$$r > R_3: \phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q + Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La dirección y sentido de E es radial en todos los casos y sentido hacia afuera de las esferas.

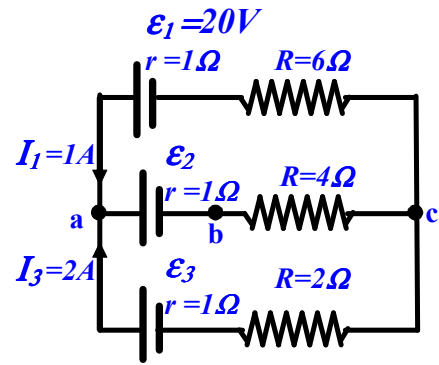
$$c) V_{R_1} - V_{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r} \right)_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$d) C = \frac{Q}{V_{R_1} - V_{R_2}} = \frac{Q4\pi\epsilon_0}{Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

e) Al rellenar el espacio entre los conductores con dieléctrico de $\epsilon_r = 2$, la capacidad se multiplica por 2, la ddp y el E se dividen entre 2.

2) En el circuito de la figura calcular:

- ε_2 y ε_3
- $V_a - V_b$
- Potencia consumida por el/los receptor/es
- Potencia total consumida por efecto Joule en el circuito
- Potencia generada por los generadores
- Rendimiento de los generadores



Solución

a) $I_2 = 3$ A de a a c, por la ley de los nudos.

$$V_{AC} = -1 \cdot 7 + 20 = 13 \text{ V}$$

$13 = 3 \cdot 5 + \varepsilon_2$; $\varepsilon_2 = 13 - 15 = -2$ V. Se trata pues de un generador, ya que valor negativo implica que la corriente sale por el borne positivo.

$$13 = -2 \cdot 3 + \varepsilon_3; \varepsilon_3 = 13 + 6 = 19 \text{ V}$$

b) $V_{AB} = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ V

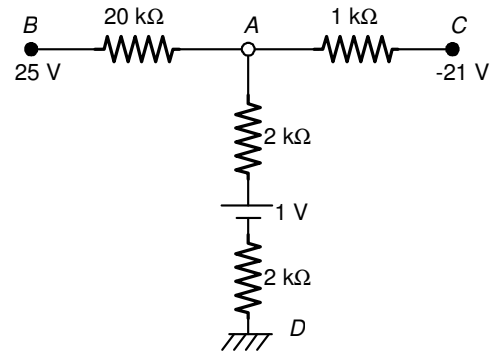
c) Dado que no hay receptores, es cero.

$$d) P_{\text{Joule}} = 1^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3 = 64 \text{ W}$$

$$e) P_{\text{generada}} = \varepsilon_1 \cdot I_1 + \varepsilon_2 \cdot I_2 + \varepsilon_3 \cdot I_3 = 20 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 64 \text{ W}$$

$$f) \eta_1 = \frac{V_1}{\varepsilon_1} = \frac{19}{20}; \eta_2 = \frac{V_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}; \eta_3 = \frac{V_3}{\varepsilon_3} = \frac{17}{19}$$

- 3) Dado el circuito de la figura,
 a) Determina las intensidades mediante el método matricial.
 b) Calcula la resistencia equivalente entre A y tierra.
 d) Calcula la tensión en el punto A.
 c) Utilizando el generador equivalente de Thevenin del circuito entre A y tierra, calcula la intensidad de corriente que circularía por una resistencia de 5 kΩ que conectásemos a dichos puntos.

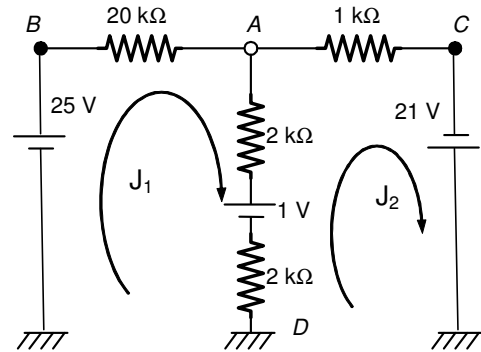


Solució:

A) A efectes de càlcul, podem substituir els potencials del punts B i C per dues fonts ideals de tensió, tal com es mostra en la figura. Després numerarem les malles i fixarem un únic sentit per a les intensitats de malla.

L'equació matricial és:

$$\begin{pmatrix} 24 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \end{pmatrix}$$



Calculem les intensitats de malla:

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 24 & -4 \\ 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{24 \times 5 - 22 \times 4}{24 \times 5 - 16} = \frac{208}{104} = 2 \text{ mA}$$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 24 \\ -4 & 22 \end{vmatrix}}{104} = \frac{24 \times 22 + 24 \times 4}{104} = \frac{624}{104} = 6 \text{ mA}$$

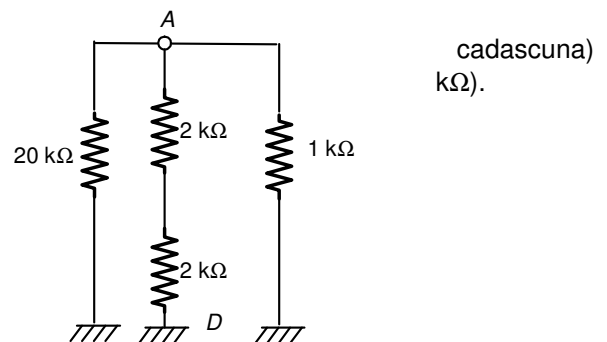
Llavors, les intensitats que circulen per cada branca són:

$$I_{BA} = J_1 = 2 \text{ mA}; \quad I_{BC} = J_2 = 6 \text{ mA} \quad \text{i} \quad I_{AD} = J_1 - J_2 = -4 \text{ mA}$$

El subíndex indica el punt inicial i final del recorregut de la intensitat.

B) El circuit lineal passiu és el següent:

on tenim dues resistències en sèrie (de 2 kΩ que es troben en paral·lel amb altres dues (de 20 i 1



Llavors, la resistència equivalent serà:

$$R_s = 2 + 2 = 4 \text{ k}\Omega$$

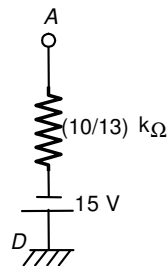
$$R_{eq} = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} \right)^{-1} = \left(\frac{26}{20} \right)^{-1} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \text{ k}\Omega$$

C) El potencial del punt A l'obtindrem en calcular la diferència de potencial entre el punt A i terra. Podem fer el càlcul per qualsevol "camí". Si utilitzem la branca del mig:

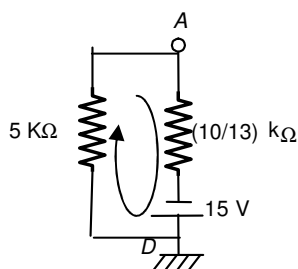
$$V_A = V_A - V_D = I_{AD} \sum_{AB} R - \sum_{AB} \varepsilon = -4 \times (2 + 2) - (-1) = -15V$$

D) El generador equivalent de Thevenin entre A i D estarà format per la resistència equivalent entre ambdós punts, que ja hem calculat a l'apartat B) i la força electromotriu de Thevenin, el valor de la qual està calculat a l'apartat anterior i que haurem de col·locar amb la polaritat corresponent.

Aleshores, el generador equivalent de Thevenin entre A i D és:



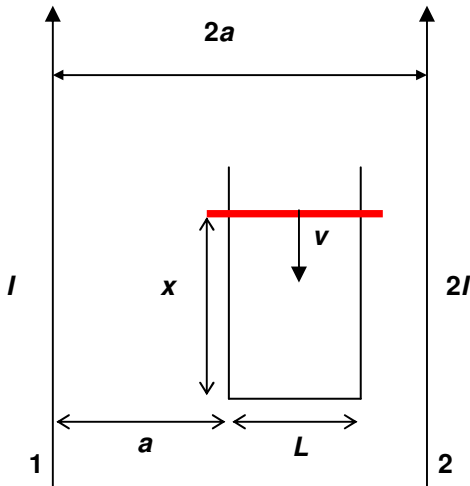
Si connecten una resistència de $5\text{ k}\Omega$ entre A i D, podem conèixer fàcilment la intensitat que circula, substituint el circuit del problema pel seu generador equivalent entre els mateixos punts. El circuit que ens queda és:



La intensitat que circula per la resistència de $5\text{ k}\Omega$ és:

$$I = \frac{15}{5 + \frac{10}{13}} = 2,6\text{ mA} \text{ en el sentit indicat en la figura.}$$

4) Por los conductores rectilíneos 1 y 2 de la figura, de longitud infinita, circula una intensidad de corriente I y $2I$ en el sentido indicado. En el mismo plano hay una espira de resistencia R , cuyo costado superior se mueve con una velocidad constante v en el sentido indicado. Calcula:



- El flujo magnético que atraviesa la espira producido por la corriente 1, corriente 2 y total (expresado en función de x).
- La fem inducida en la espira.
- La intensidad inducida en la espira, indicando su sentido.

¿A qué distancia del conductor 1 se tiene que poner el conductor 2 para que el flujo a través de la espira se anule?

Solución

- a) Tomemos un rectángulo de superficie infinitesimal dentro de la espira, situado a una distancia y del primer conductor, de altura x y anchura dy . Los campos magnéticos creados por cada uno de los dos conductores en un punto cualquiera de dicho rectángulo valdrán, respectivamente:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \text{ T con sentido entrante en el papel}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 2I}{2\pi(2a - y)} \text{ T con sentido saliente desde el papel}$$

Y los flujos respectivos:

$$\phi_1 = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x dy = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a} \text{ Wb}$$

$$\phi_2 = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 2I}{2\pi(2a - y)} x dy = \frac{\mu_0 2I x}{2\pi} \ln \frac{a}{a-L}$$

Wb

Por tanto, el flujo total, saliente desde el papel, será:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \left(2 \ln \frac{a}{a-L} - \ln \frac{a+L}{a} \right) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{a^3}{(a+L)(a-L)^2} \text{ Wb saliente desde el papel}$$

- b) Teniendo en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$

$$\varepsilon = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a^3}{(a+L)(a-L)^2} \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a^3}{(a+L)(a-L)^2} \text{ V}$$

- c) $i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \frac{a^3}{(a+L)(a-L)^2}$ El sentido de esta corriente inducida es levógiro (a izquierdas)

d) Sea z la distancia que separa la espira del segundo conductor. En estas condiciones, el flujo que atraviesa la espira debido al primer conductor será el mismo que el calculado en el apartado a:

$$\phi_1 = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x dy = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a} \text{ Wb}$$

En cambio, el flujo debido al segundo conductor, si llamamos ahora y a la distancia del segundo conductor al elemento infinitesimal de superficie considerado, será:

$$\phi_2 = \int_z^{z+L} \frac{\mu_0 2I}{2\pi y} x dy = \frac{\mu_0 2Ix}{2\pi} \ln \frac{z+L}{z} \text{ Wb}$$

Y el flujo total saliente desde el papel sería:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \left(2 \ln \frac{z+L}{z} - \ln \frac{a+L}{a} \right) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{a(z+L)^2}{(a+L)z^2} \text{ Wb}$$

Para conseguir que este flujo se anule, debe ocurrir que el cociente afectado por el ln sea igual a la unidad, es decir, que:

$$\frac{a(z+L)^2}{(a+L)z^2} = 1 \Rightarrow a(z+L)^2 = (a+L)z^2$$

Desarrollando ambos miembros de la ecuación:

$$az^2 + aL^2 + 2azL = az^2 + Lz^2 \Rightarrow Lz^2 - 2aLz - aL^2 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$z = \frac{2aL \pm \sqrt{4a^2L^2 + 4aL^3}}{2L} = \frac{2aL \pm \sqrt{4L^2(a^2 + aL)}}{2L} = \frac{2aL \pm 2L\sqrt{a^2 + aL}}{2L} = a \pm \sqrt{a^2 + aL}$$

Por tanto, la distancia que deberá separar ambos conductores para que el flujo neto a través de la espira se anule, será:

$$2a + L \pm \sqrt{a^2 + aL} \text{ m}$$

De las dos soluciones posibles, la solución $2a + L - \sqrt{a^2 + aL}$ m resulta físicamente imposible,

ya que al ser tanto L como a positivos, $\sqrt{a^2 + aL} > a \Rightarrow 2a + L - \sqrt{a^2 + aL} < a + L$

Ello significa que el segundo conductor debería atravesar la espira, lo que es incompatible con el planteamiento del problema.

Por otra parte, como la solución $2a + L + \sqrt{a^2 + aL}$ es físicamente posible y compatible con el planteamiento del problema, la solución correcta es esta:

$$2a + L + \sqrt{a^2 + aL}$$