	EXAMEN FINAL DE FFI **Convocatòria de febrer** Curs 2007/08	Escola Tècnica Superior d'Informàtica Aplicada
Nom i cognoms:		Grup:

Problema 1	**Problema 1**
Una esfera conductora, de radi R_1, està aïllada i carregada amb càrrega elèctrica Q>0. a) Deduir l'expressió del camp elèctric i el potencial en punts interiors i exteriors de l'esfera. b) Introduïm l'esfera anterior, amb la càrrega Q, centrada dins d'una altra esfera conductora buida, de radis R_2 i R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) i connectada a terra. Quin és el valor del camp elèctric i el potencial en qualsevol punt situat a una distancia r del centre del sistema? ($r<R_1$, $R_1< r<R_2$, $R_2< r<R_3$, $R_3< r$)	Una esfera conductora, de radio R_1, está aislada y cargada con carga eléctrica Q>0 . a) Deducir l'expresión del campo eléctrico y el potencial en puntos interiores y exteriores de l'esfera. b) Introducimos l'esfera anterior, con la carga Q, centrada dentro de otra esfera conductora vacía, de radios R_2 y R_3 ($R_1< R_2<R_3$) y conectada a tierra. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico y el potencial en cualquier punto sito a una distancia r del centro del sistema? ($r<R_1$, $R_1< r<R_2$, $R_2< r<R_3$, $R_3< r$)

a) Si $r>R_1$

En estar aïllada l'esfera, la càrrega es distribuirà uniformement per la seua superfície; llavors tindrem una distribució superficial de càrrega esfèrica i de densitat constant. El sistema té simetria esfèrica i, per al càlcul del camp elèctric, podrem aplicar Gauss a una superfície esfèrica concèntrica a l'anterior i de radi r.

$\phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S E\cdot ds = E\int_S ds = ES = E.4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r>R_1) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$ amb direcció radial i sentit cap a fora

Per a la integració s'ha tingut en compte que $\vec{E}\perp S$ ($\vec{E}//d\vec{s}$) i que el mòdul de $\vec{E}$ és el mateix en tota la superfície.

Per al càlcul del potencial, si considerem el seu origen a l'infinit (V(∞)=0), podrem calcular la diferència de potencial entre l'infinit i un punt qualsevol, integrant el camp elèctric al llarg d'una línia de camp. D'aquesta forma, en la integral $\vec{E}//d\vec{r}$:

$$V(r>R_1) = V_r - V_\infty = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{r}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Si $r<R_1$

El camp elèctric és nul: **E(r<R$_1$)=0** (es tracta de l'interior d'un conductor) i el potencial constant, V=C. En els punts de la superfície s'ha de complir que el valor del potencial ha de ser el mateix tant si els considerem punts interiors com si d'un punt exterior es tractara; llavors:

$$V(r = R_1) = C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \rightarrow V(r < R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

b) Tenim tres distribucions esfèriques i homogènies de càrrega: Q en R_1; -Q en R_2 (a causa del teorema dels elements corresponents) i Q' en R_3. Per altra banda, sabem que el potencial de l'esfera exterior és nul per estar connectada a terra. Per a la resolució del problema podem aplicar superposició a les tres distribucions esfèriques i fer ús del resultat obtingut a l'apartat anterior.

El càlcul del potencial a l'interior de l'esfera exterior ens permetrà conèixer el valor de Q': com en aquest lloc els punts són exteriors a les càrregues Q i -Q, i interiors a la càrrega Q', en aplicar superposició fent ús del valor del potencial calculat a l'apartat anterior:

$$V(R_2 < r < R_3) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0$$ (per estar connectat a terra).

Aleshores Q'=0

Llavors, tan sols tenim dues distribucions de càrrega. Aplicant-hi superposició:

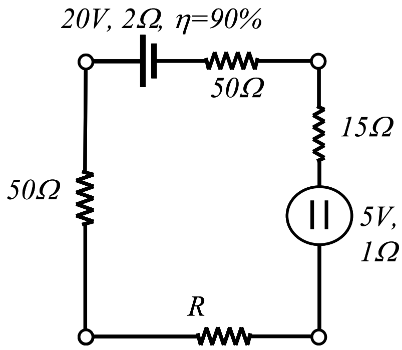
Si r>R$_3$ $\quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$ i $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$

Si R$_2$<r<R$_3$ $\quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$ i $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$

Si R$_1$<r<R$_2$ $\quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ i $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + 0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Si r<R$_1$ $\quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \text{cnt}$ i $E = 0 + 0 = 0$

Nota: aquesta segona part es por calcular també aplicant Gauss per al càlcul del camp elèctric en cada zona i integrant per al càlcul del potencial, de forma anàloga a com s'ha fet a l'apartat a.

Problema 2	Problema 2	
Donat el circuit de la figura: a) Determina el valor de la resistència R per que el rendiment del generador siga del 99%. b) Determina el valor de la intensitat de corrent. c) Determina la potencia generada i transformada en el generador i en el motor, i dissipada per efecte Joule en la totalitat del circuit. d) Determina la diferència de potencial i rendiment del motor. e) Quin rendiment tindrà el generador si augmentem la força contraelectromotriu del motor a 10V?	Dado el circuito de la figura: a) Determina el valor de la resistencia R para que el rendimiento del generador sea del 99% b) Determina el valor de la intensidad de corriente. c) Determina la potencia generada y transformada en el generador y motor, y la disipada por efecto Joule en la totalidad del circuito. d) Determina la diferencia de potencial y rendimiento del motor. e) ¿Cuál será el rendimiento del generador si aumentamos las fuerza contraelectromotriz del motor a 10V?	

a)

$$\eta_g = \frac{\varepsilon - Ir}{\varepsilon} = \frac{20 - I2}{20} = 0{,}99 \rightarrow I = 0{,}1A$$

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{20-5}{118+R} = 0{,}1A \rightarrow R = 32\Omega$$

c)

$$P_g = \varepsilon \cdot I = 20 \cdot 0{,}1 = 2W$$

$$P_t = \varepsilon' \cdot I = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5W$$

$$P_J = I^2 \sum R = 0{,}1^2 \cdot 150 = 1{,}5W$$

d)

$$V_m = \varepsilon' + Ir' = 5 + 0{,}1 \cdot 1 = 5{,}1V$$

$$\eta_m = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon' + Ir'} = \frac{5}{5{,}1} = 98\%$$

e)

$$I' = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{20-10}{150} = \frac{1}{15}A$$

$$\eta_g = \frac{\varepsilon - I'r}{\varepsilon} = \frac{20 - \frac{1}{15}2}{20} = 99{,}3\%$$

Problema 3

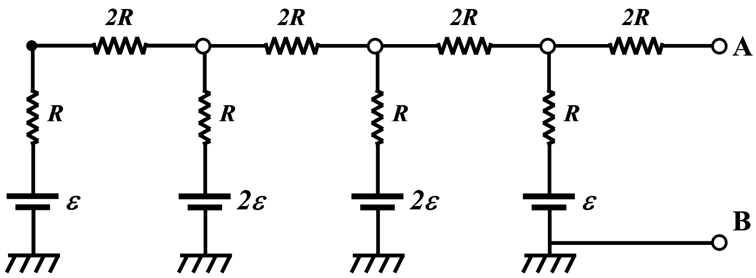
En el circuit de la figura, si R=1 Ω y ε=4 V:

a) Calcula la diferència de potencial entre els punts A i B.
b) Calcula la resistència equivalent del circuit entre els punts A i B.
c) Quina serà la intensitat de corrent que circularà per una resistència R al connectar-la entre els punts A i B?

Problema 3

En el circuito de la figura, si R=1 Ω i ε=4 V:

a) Calcula la diferencia de potencial entre los puntos A y B.
b) Calcula la resistencia equivalente entre los puntos A y B.
c) ¿Cuál será la intensidad de corriente que circule por una resistencia R al conectarla entre los puntos A y B?



a)
b) tres malles, numerades d'esquerre a dreta, amb sentit horari d'intensitat. Per calcular la diferència de potencial entre A i B hem de calcular la intensitat de corrent de la tercera malla. La intensitat de corrent per la resistència de *2R* connectada a A és nul·la per estar en circuit obert:

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -R & 4R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4R & -R & -\varepsilon \\ -R & 4R & 0 \\ 0 & -R & \varepsilon \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -R & 4R \end{vmatrix}} = \frac{16\varepsilon R^2 - 2\varepsilon R^2}{64R^3 - 8R^3} = \frac{14\varepsilon}{56R} = \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{4}{4} = 1\,\text{A}$$

$$V_{AB} = J_3 R - (-\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4R} R + \varepsilon = \frac{5\varepsilon}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5\,\text{V}$$

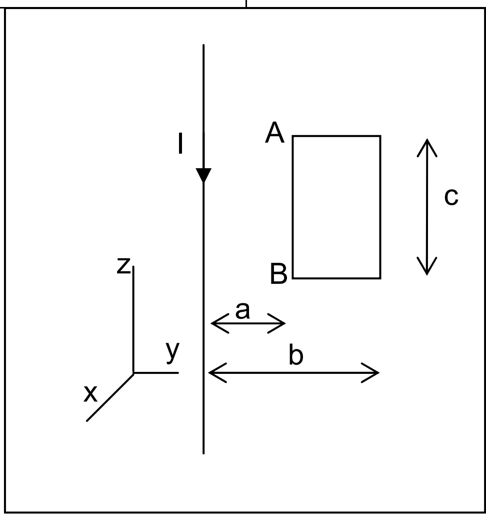
c) la resistència es pot calcular per combinacions sèrie i paral·lel, o per malles, tenint en compte que tindrem una quarta malla:

$$R_{AB} = \frac{\begin{vmatrix} 4R & -R & 0 & 0 \\ -R & 4R & -R & 0 \\ 0 & -R & 4R & -R \\ 0 & 0 & -R & 3R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -R & 4R \end{vmatrix}} = \frac{153R}{56} = \frac{153}{56} \approx 2{,}73\,\Omega$$

c) calculem la intensitat de corrent utilitzant el generador equivalent de Thevenin, ja que hem calculat la força electromotriu (V_{AB}) i la resistència (R_{AB}):

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{\frac{5\varepsilon}{4}}{\frac{153R}{56} + R} = \frac{60\varepsilon}{209R} = \frac{60 \cdot 4}{209} = 1{,}15\ \text{A}$$ (sentit de la intensitat horari)

Problema 4	**Problema 4**
Un conductor rectilini i indefinit, pel qual circula una intensitat I=kt (on k és una constant positiva i t és el temps) és coplanari a una espira rectangular, de resistència elèctrica R, situada tal com s'assenyala a la figura. Calcula: a) Flux del camp magnètic creat pel conductor a través de l'espira. b) Intensitat induïda en l'espira. c) Força sobre el tram A-B de l'espira. d) Coeficient d'inducció mútua entre el conductor i l'espira. e) Si per l'espira circula una intensitat I'=k't, calcula la força electromotriu induïda en el conductor rectilini.	Un conductor rectilíneo e indefinido, por el que circula una intensidad I=kt (dónde k es una constante positiva y t es el tiempo) es coplanario a una espira rectangular, de resistencia eléctrica R, sita tal como se señala en la figura. Calcula: a) Flujo del campo magnético creado por el conductor a través de la espira. b) Intensidad inducida en la espira. c) Fuerza sobre el tramo A-B de la espira. d) Coeficiente de inducción mutua entre el conductor y la espira. e) Si por la espira circula una intensidad I'=k't, calcula la fuerza electromotriz inducida en el conductor rectilíneo.



a) Per tractar-se d'un conductor rectilini i indefinit, el camp magnètic creat per la intensitat I té per mòdul $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$, on *y* és la distància des del conductor al punt on s'ha calculat el B. En els punts de la superfície plana definida per l'espira, el camp és perpendicular i amb sentit positiu de l'eix X.

El flux serà el resultat d'integrar l'expressió: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

Donat que el valor del camp magnètic és funció única de la variable *y*, Si considerem com a vector diferencial de superfície a $ds = c\,dy\vec{i}$, la integral serà simple (tant sol apareixerà la variable *y*) i el producte $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ serà el producte dels mòduls amb signe positiu. Tenint en compte que els límits d'integració per a *y* són *a* i *b*, i que la intensitat és I=kt:

Llavors, $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B ds = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi y} c dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} c \int_a^b \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} c \ln\left(b/a\right) = \frac{\mu_0 kt}{2\pi} c \ln\left(b/a\right)$

b) La força electromotriu induïda resulta d'aplicar la llei de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} c \ln\left(b/a\right) \frac{d(kt)}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} ck \ln\left(b/a\right)$$

La intensitat en l'espira és la relació entre la f.e.m. i la resistència:

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R} c \ln k\left(b/a\right)$$

El seu sentit el podem conèixer aplicant la llei de Lentz: Com k>0, la intensitat augmenta i, per tant, també augmenta el flux del camp magnètic. Aleshores, la intensitat induïda haurà de crear un camp magnètic a través de l'espira amb sentit contrari al creat pel conductor, en sentit negatiu de l'eix X. Llavors, **la intensitat induïda tindrà sentit horari.**

c) La força deguda a un camp magnètic que actua sobre un conductor que transporta càrrega té l'expressió: $\vec{F} = I \int_L d\vec{l} \times \vec{B}$. En el tram AB la intensitat que circula és la calculada a l'apartat anterior, el vector $d\vec{l} = dl\vec{k}$ (la intensitat va de B a A) i el camp magnètic és el mateix en tots els punts (*y*=a): $\vec{B} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi a} \vec{i}$

Aleshores,

$$\vec{F} = I \int_L d\vec{l} \times \vec{B} = I_i \int_c dl\vec{k} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{i} = I_i \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_c dl\left(\vec{k} \times \vec{i}\right) = I_i \frac{\mu_0 I}{2\pi a} c\vec{j} = \frac{\mu_0}{2\pi R} ck \ln\left(b/a\right) \frac{\mu_0 kt}{2\pi a} c\vec{j} = \frac{\mu_0{}^2 c^2 kt}{4\pi^2 Ra} \ln\left(b/a\right) \vec{j}$$

d) Podem calcular el coeficient d'inducció mútua a partir de la relació entre el flux que travessa l'espira creat per la intensitat I (calculat a l'apartat a) i aquesta intensitat:

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2\pi} c \ln\left(b/a\right)}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} c \ln\left(b/a\right)$$

e) El coeficient d'inducció mútua serveix tant per a calcular el valor de la f.e.m. induïda en l'espira deguda la variació de la intensitat en el conductor rectilini, com per a conèixer la f.e.m. induïda en el conductor rectilini deguda l'acció de la intensitat que circula per l'espira. Llavors, aplicant la llei de Faraday, la f.e.m. induïda en el conductor rectilini:

$$\varepsilon = -M \frac{dI'}{dt} = -M \frac{d(k't)}{dt} = -Mk' = -\frac{\mu_0}{2\pi} ck' \ln\left(b/a\right)$$

b)