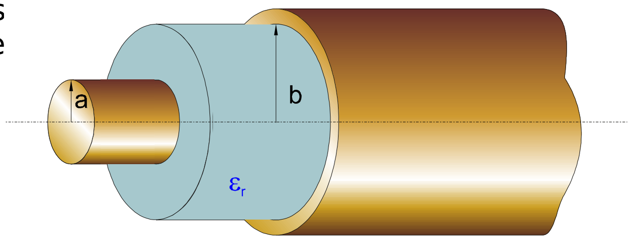
DEPARTAMENT DE FÍSICA APLICADA - ETSIA EXAMEN DE PROBLEMES DE F.F.I.	30 de juny de 2004
COGNOMS:	**NOM:**

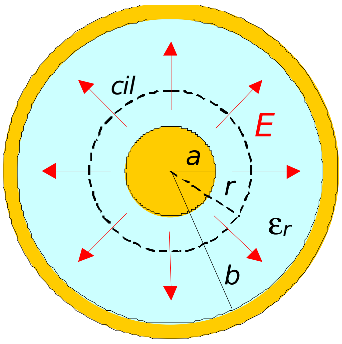
1. Un conductor cilíndrico de radio *a* se encuentra cargado uniformemente con una densidad superficial de carga σ. Concéntrico con él hay otro conductor con forma de superficie cilíndrica de radio *b* descargado; habiendo colocado entre los dos conductores un dieléctrico de constante dieléctrica relativa ε_r. Calcula:



a) Campo eléctrico en el dieléctrico.
b) Diferencia de potencial entre los dos conductores.
c) Capacidad por unidad de longitud.

Solución

a) Tomando una superficie gaussiana con forma de cilindro de radio *r* y longitud *L* concéntrico con el conductor, aplicamos el teorema de Gauss. El flujo que atraviesa este cilindro vale:



$$\Phi_{cil} = \frac{\sigma\, 2\pi a L}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Por otra parte, al ser las líneas de campo eléctrico normales a la superficie lateral del cilindro y tener el mismo módulo en todos los puntos de éste:

$$\oint E \cdot dS = ES = E\,2\pi r L$$

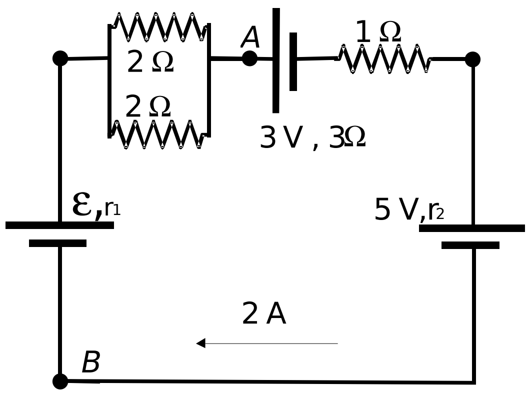
obteniendo:

$$E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r}$$

b) $$V_a - V_b = \int_b^a -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left|\frac{1}{r}\right|_b^a = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$$

c) $$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| = \frac{\sigma\, 2\pi a L}{\frac{\sigma a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{b}{a}}$$

2. En el circuito de la figura, por el que circula una intensidad *I* = 2A en el sentido indicado, el generador de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r_1 genera una potencia de 25.5W de la cual 1W se disipa en la resistencia interna r_1 por efecto Joule. La resistencia de r_2 disipa 0.5W de potencia por efecto Joule.



a) Determina los valores de las resistencias internas r_1 y r_2 y la fuerza electromotriz del generador.
b) ¿Cuánto vale V_{AB}?
c) Realiza un balance de potencias de todo el circuito (potencias generadas y potencias consumidas).
d) Calcula el rendimiento de cada uno de los generadores y receptores del circuito.

Solución. (Nota, solución al problema corregida la errata del enunciado donde ponía 25.5 en lugar de 37.5)

a) Determinar ε, r_1 y r_2

$P_{gen} = \varepsilon I = 37.5\ W \Rightarrow \underline{\varepsilon} = 37.5 / 2 = \underline{18.75\ V}$

$P_{dis\ r1} = 1\ W = r_1 .\ I^2 \Rightarrow \underline{r_1} = 1/2^2 = \underline{0.25\Omega}$

$P_{dis\ r2} = 0.5\ W = r_2 .\ I^2 \Rightarrow \underline{r_2} = 0.5/2^2 = \underline{0.125\Omega}$

b) $\underline{V_{AB}} = \Sigma R\, I - \Sigma \varepsilon = (3 + 1 + 0.125) * 2 - (-3 - 5) = \underline{16.25\ V;}$

Si se calcula por el otro sentido: $\underline{V_{AB}} = \Sigma R\, I - \Sigma \varepsilon = (1 + 0.25) * (-2) - (-18.75) = \underline{16.25\ V}$;

c)Balance de potencias (generadas / consumidas)

<u>Potencias generadas</u>: Sólo hay un generador que genera <u>37.5 W</u>

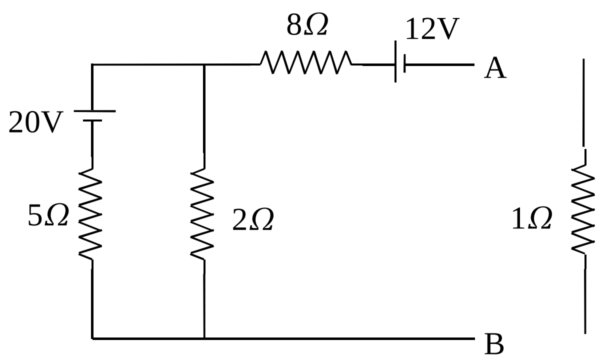
<u>Potencias consumidas</u>: disipadas en todas las resistencias + transformadas por los receptores:
$(1+ 0.25 + 0.125 + 1 + 3) * 2^2 + (3 * 2) + (5 * 2) = \underline{37.5\ W}$

d) Rendimiento de generadores y receptores del circuito

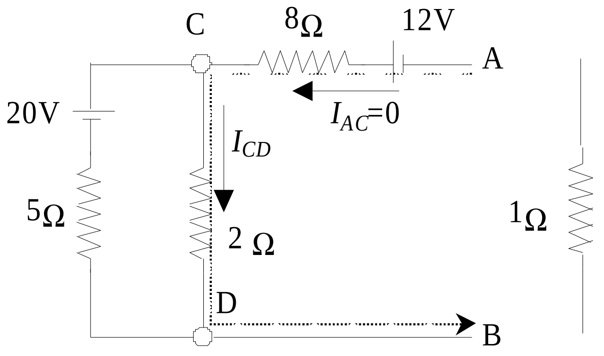
$\underline{\eta_{gen}} = P_{sum} / P_{gen} = (\varepsilon I - rI^2) / \varepsilon I = (18.75 - 0.25*2) / 18.75 = 0.97 \Rightarrow \underline{97\%}$
$\underline{\eta_{rec\ 3}} = P_{trans} / P_{cons} = (\varepsilon I) / (\varepsilon I + rI^2) = 3 / (3 + 3 * 2) = 0.33$ Þ $\underline{33\ \%}$

3. Dado el circuito de la figura,

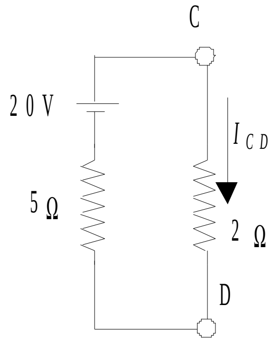
a) Calcula el equivalente de Thevenin del circuito entre los terminales A y B, indicando su polaridad.
b) Si entre dichos terminales se conecta una resistencia de 1Ω, calcula la intensidad que circula a través de ella.
c) Tras añadir la resistencia de 1Ω, calcula la intensidad que circula por cada rama del circuito completo mediante el método de las mallas.



Solución:



a) Para calcular el equivalente de Thevenin necesitamos en primer lugar la diferencia de potencial entre los puntos A y B, V_{AB}, que calculamos siguiendo, por ejemplo, el camino ACDB, pasando por la resistencia de 2 Ω indicado mediante la línea de puntos en la figura:



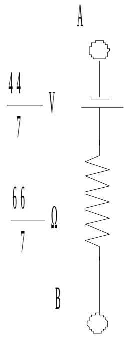
$$V_{AB} = \sum IR - \sum \varepsilon = I_{AC} 8 + I_{CD} 2 - 12$$

donde se ha de tener en cuenta que $I_{AC}=0$. La intensidad I_{CD} la calculamos a partir del circuito cerrado constituido por las resistencias de 5 y 2 Ω y el generador de 20 V:

$$I_{CD} = \frac{20}{5+2} = \frac{20}{7} = 2{,}857 \text{ A}$$

$$V_{AB} = \sum IR - \sum \varepsilon = I_{CD} 2 - 12 = \frac{20}{7} 2 - 12 = \frac{-44}{7} = -6{,}286 \text{ V} = \varepsilon_T$$

donde observamos que la diferencia de potencial es negativa, lo cual nos indica que el punto B está a mayor potencial que el A, y por tanto el equivalente de Thevenin tendrá el borne positivo en el lado B, y el negativo en el A.

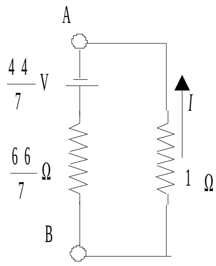


Para calcular la resistencia equivalente entre A y B, hemos de observar que las resistencias de 5 y 2 Ω están en paralelos, y la equivalente a las dos en serie con la de 8 Ω

$$R_{eq} = \left(1/5 + 1/2\right)^{-1} + 8 = \frac{66}{7} = 9{,}429 \ \Omega$$

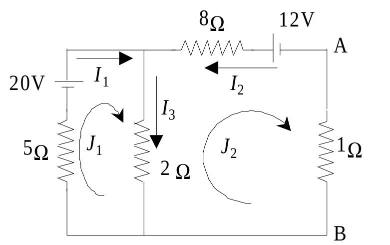
Con todo ello el equivalente de Thevenin es el mostrado en la figura, con la polaridad indicada.

b)



$$I = \frac{20/7}{66/7+1} = \frac{44/7}{73/7} = \frac{44}{73} = 0{,}603 \text{ A}$$

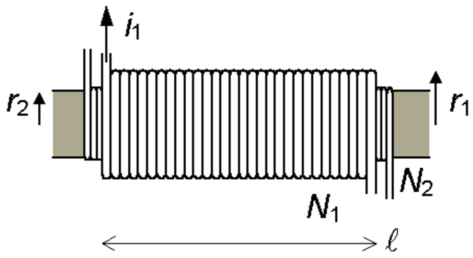
c) $\begin{pmatrix} 20 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$



$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -2 \\ -12 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{196}{73} = 2{,}685 \text{ A} \qquad J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 20 \\ -2 & -12 \end{vmatrix}}{|73|} = \frac{-44}{73} = -0{,}603 \text{ A}$$

$$I_1 = J_1 = 2{,}685 \text{ A} \quad I_2 = -J_2 = 0{,}603 \text{ A} \quad I_3 = J_1 - J_2 = 2{,}685 + 0{,}603 = 3{,}288 \text{ A}$$

Evidentemente I_2 coincide con la intensidad I calculada en el apartado b, puesto que en ambos casos se ha calculado la misma intensidad, pero utilizando dos métodos diferentes.



4. Una bobina está constituida por N_1=1000 espiras circulares de radio r_1 = 5 cm arrolladas formando un cilindro de 50 cm de longitud. Por ellas circula una corriente variable con el tiempo según la expresión:

$$i_1 = 0{,}5 \cos 1000t \quad (i_1 \text{ en A, } t \text{ en s})$$

a) ¿Cuál es el campo magnético máximo en el eje de la bobina?
b) Si se sitúa otra bobina de la misma longitud con N_2=2000 espiras y radio r_2 = 2 cm, en el interior y concéntrica con la anterior, ¿cuál es el flujo magnético a través de esta segunda bobina, admitiendo que el campo magnético calculado en el apartado a) es uniforme?
c) ¿Qué fuerza electromotriz se induce en la segunda bobina?
d) ¿Cuál es el coeficiente de inducción mutua entre las dos bobinas?

Solución

a) El campo producido por un solenoide recto muy largo comparado con su radio vale aproximadamente:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 0{,}5\cos 1000t}{0{,}5} = 4\pi \cdot 10^{-4} \cos 1000t \quad \text{(A)}$$

por lo que el valor máximo del campo magnético vale: 0,4πmA = 1,26 mA

b) Admitiendo que al campo obtenido es uniforme, el flujo que atraviesa esta segunda bobina vale

$$\Phi = BN_2S_2 = 4\pi \cdot 10^{-4} \cos 1000t \cdot 2000 \cdot \pi \cdot 0{,}02^2 = 32\pi^2 \cdot 10^{-5} \cos 1000t \quad \text{(Wb)}$$

c) Aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 32\pi^2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 \operatorname{sen} 1000t = 0{,}32\pi^2 \operatorname{sen} 1000t \quad \text{(V)}$$

d) El coeficiente de inducción mutua es el cociente entre el flujo en la segunda bobina y la intensidad de la primera:

$$M = \frac{\Phi_2}{i_1} = 64\pi^2 \cdot 10^{-5} = 6{,}32 \,\text{mH}$$