LECCIÓN 2 - MOMENTOS Y SISTEMAS DE VECTORES

2.1 CLASIFICACIÓN DE VECTORES

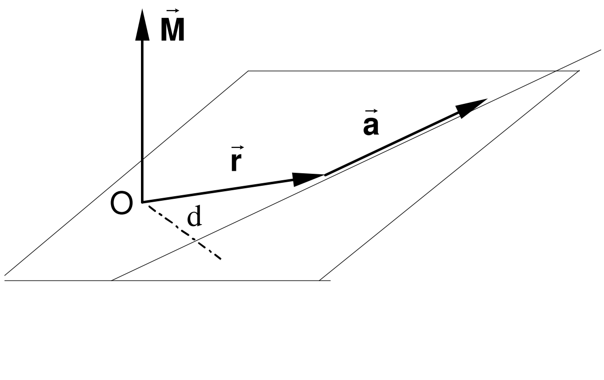
Se dice que dos vectores son equipolentes cuando tienen la misma dirección, módulo y sentido.

A partir de esta definición podemos clasificar, según su punto de aplicación, los vectores en:

- <u>libres</u>: un vector es libre cuando puede sustituirse por cualquiera de sus equipolentes sin que por ello deje de representar la misma magnitud. Ejemplo: el vector velocidad del viento.
- <u>deslizantes</u>: cuando puede sustituirse el vector por cualquiera de sus equipolentes contenidos en su línea de acción. Ejemplo: el vector fuerza en la dirección de una cuerda.
- <u>ligados</u>: no pueden sustituirse por ninguno. Ejemplo: el vector intensidad de campo eléctrico de una carga puntual.

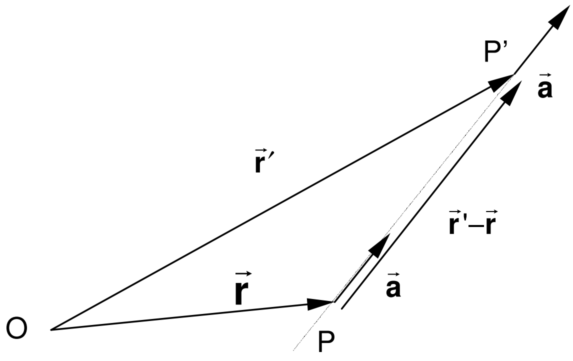
2.2 MOMENTO CENTRAL DE UN VECTOR. CAMBIO DEL CENTRO DE MOMENTOS.

Se define el momento central de un vector $\vec{\mathbf{a}}$ respecto de un punto O, $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{a}})$ como el producto vectorial $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}}$



siendo $\vec{\mathbf{r}}$ un vector que tiene por origen el punto O, y su extremo en un punto cualquiera de la línea de acción de $\vec{\mathbf{a}}$.

Si nos interesa conocer únicamente el módulo del momento:



$$\left|\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{a}})\right| = |\vec{\mathbf{r}}||\vec{\mathbf{a}}|\mathbf{sen}\varphi = |\vec{\mathbf{a}}|d = ad$$

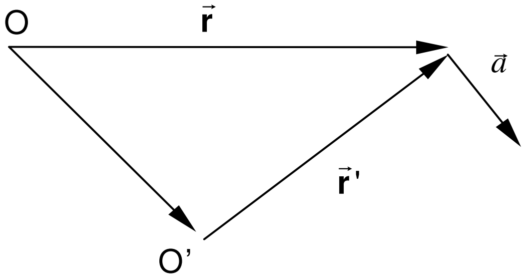
siendo d la distancia más corta entre O y la línea de acción de $\vec{\mathbf{a}}$

El momento no cambia si se mueve el vector por su línea de acción:

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{r}}'\times\vec{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\mathbf{PP'}})\times\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{a}}$$

Si las componentes del vector $\vec{\mathbf{a}}$ son a_X, a_Y, a_Z y si las coordenadas de un punto cualquiera de su línea de acción son (x_1,y_1,z_1), la expresión de su momento respecto de $O(x_0,y_0,z_0)$ será:

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$



Si en lugar de expresar el momento respecto de O queremos expresarlo respecto de otro punto O':

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o'}}(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{r}}'\times\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{O'}\vec{\mathbf{O}} + \vec{\mathbf{r}})\times\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}}(\vec{\mathbf{a}}) - \mathbf{O}\vec{\mathbf{O}}'\times\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{a}}) + \overrightarrow{\mathbf{O'O}}\times\vec{\mathbf{a}}$$

2.3. MOMENTO ÁXICO DE UN VECTOR

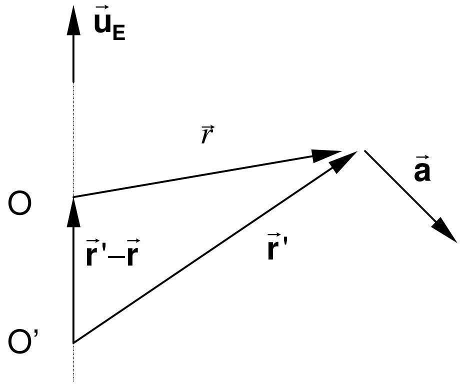
Se llama momento áxico de un vector o momento de un vector respecto a un eje, a la proyección sobre dicho eje del momento central del vector respecto a cualquiera de sus puntos:

$$M_E = \vec{\mathbf{M}}_o(\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{E}}$$

siendo $\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{E}}$ el versor que define al eje

$$M_E = \vec{\mathbf{M}}_o(\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} u_{E_X} & u_{E_Y} & u_{E_Z} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

siendo (x_1,y_1,z_1) las coordenadas de un punto cualquiera de la línea de acción del vector $\vec{\mathbf{a}}$ y (x_0,y_0,z_0) las coordenadas de un punto cualquiera del eje.



El momento central del vector sí depende del punto del eje considerado:

$$\vec{\mathbf{M}}_o(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{o'}(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{r}}' \times \vec{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}) \times \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{M}}_o(\vec{\mathbf{a}})$$

pero no así la proyección sobre el eje, que es la misma:

$$\vec{\mathbf{M}}_o(\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_E = (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_E$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{o'}(\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_E = ((\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}) \times \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_E = (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_E = \vec{\mathbf{M}}_o(\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}_E$$

ya que $(\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}})$ y $\vec{\mathbf{u}}_E$ son paralelos.

2.4. SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

Si denominamos sistema de vectores deslizantes a un conjunto de vectores deslizantes $\vec{\mathbf{a}}_i$ (i=1…n), se llama resultante del sistema al vector suma de los vectores que componen el sistema, considerando a éstos como vectores libres.

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{a}}_i$$

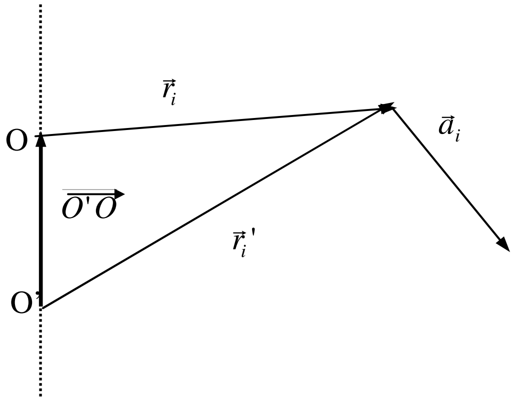
Se llama momento resultante del sistema respecto de un punto a la suma de los momentos centrales respecto de ese punto de cada uno de los vectores del sistema.

$$\vec{\mathbf{M}}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{a}}_i$$

De forma análoga se define momento áxico del sistema respecto de un eje a la suma de los momentos áxicos de cada uno de los vectores del sistema.

Al conjunto de la resultante y el momento resultante en un punto se le llama torsor del sistema en ese punto.

El momento resultante respecto de otro punto O' será



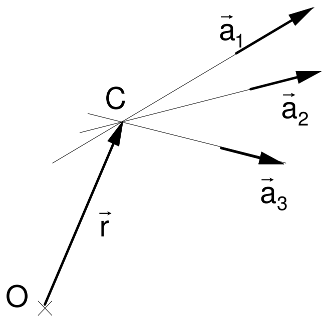
$$\vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}\,'_i \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i + \vec{O'O}) \times \vec{a}_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{a}_i) + \sum_{i=1}^{n} \vec{O'O} \times \vec{a}_i = \vec{M}_0 + \vec{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

$$\boxed{\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0 - \vec{OO'} \times \vec{R} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}}$$

2.4.1. Sistemas de vectores concurrentes

El sistema de vectores más simple es aquel en que sus líneas de acción pasan por un punto. Se trata de vectores concurrentes. En este tipo de sistemas, el momento resultante será:



$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \vec{r} \times \vec{R}$$

es decir el momento resultante es el momento de la resultante (teorema de Varignon).

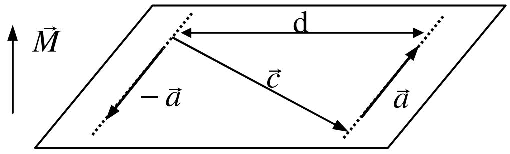
2.4.2. Par de vectores

Se denomina par al conjunto de dos vectores deslizantes de igual módulo y dirección, sentido opuesto y diferente línea de acción.

Evidentemente, la resultante de un par es nula, por lo que el momento del par es independiente del punto respecto del que se calcule, ya que

$$\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o - \cancelto{0}{\overrightarrow{OO'} \times \vec{R}} = \vec{M}_o$$

Si calculamos el momento respecto de un punto de la línea de acción de uno de los vectores:
$\vec{M} = \vec{c} \times \vec{a}$



donde $\vec{c}$ es un vector que va de una línea de acción a otra. Su módulo será M = d·a, donde d es la distancia entre las dos líneas de acción.

El sentido de $\vec{\mathbf{M}}$ viene dado por la regla del tornillo (criterio dextrógiro) aplicada al par de vectores.

2.5. SISTEMAS DE VECTORES LIGADOS PARALELOS

Sea un sistema de vectores paralelos $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i}$ (i=1…n), $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i} = a_i\vec{\mathbf{u}}$ y O el origen de un sistema de referencia arbitrario. $\vec{\mathbf{u}}$ es el vector unitario en la dirección del sistema. Si A_i es el punto de aplicación de $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i}$, la resultante del sistema y el momento resultante respecto de O son:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i} = \left(\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} a_i\right)\vec{\mathbf{u}} \qquad \vec{\mathbf{M}}_\mathbf{o} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} (\overrightarrow{\mathbf{OA}}_\mathbf{i} \times \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i})$$

Tienen especial interés, desde el punto de vista de la Mecánica, aquellos puntos respecto de los cuales el momento resultante del sistema se anula. Si llamamos C a uno cualquiera de tales puntos, aplicando la ecuación del cambio del centro de momentos, se cumplirá que:

$$\vec{\mathbf{M}}_C = \vec{\mathbf{M}}_O + \overrightarrow{\mathbf{CO}} \times \vec{\mathbf{R}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{M}}_O = \overrightarrow{\mathbf{OC}} \times \vec{\mathbf{R}}}$$

Esta última ecuación significa que, si aplicamos la resultante del sistema en C, entonces el momento resultante del sistema y el momento de la resultante (aplicada en C) respecto de cualquier punto del espacio, coinciden.

Se puede comprobar fácilmente que el punto C que cumple la condición anterior no es único, sino que todas las posibles soluciones se alinean formando una recta, que se conoce con el nombre de eje central del sistema de vectores.

De todos los puntos del eje central existe uno, que llamaremos G, que tiene la propiedad añadida de que, aunque cambiemos la dirección de los vectores del sistema (cambiemos $\vec{\mathbf{u}}$), el momento resultante del sistema respecto de él sigue anulándose. Efectivamente, según la ecuación anterior:

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \overrightarrow{\mathbf{OC}} \times \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} \times (\sum_{i=1}^{n} a_i)\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}}(\sum_{i=1}^{n} a_i) \times \vec{\mathbf{u}}$$

Pero por otra parte, de la definición de momento resultante de un sistema,

$$\vec{\mathbf{M}}_\mathbf{o} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{OA}}_\mathbf{i} \times a_i\vec{\mathbf{u}} = (\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{OA}}_\mathbf{i} \cdot a_i) \times \vec{\mathbf{u}}$$

Dado que los resultados de las dos ecuaciones anteriores deben coincidir; y ambas son el resultado de sendos productos vectoriales en los que el segundo multiplicando es el mismo, existen muchos puntos C que cumplen ambas igualdades, como ya hemos dicho. Pero si queremos que ambas igualdades se mantengan para cualquier dirección del sistema de vectores (cualquier valor de $\vec{\mathbf{u}}$), la única posibilidad es que sea

$$\vec{\mathbf{OC}}(\sum a_i) = \sum \vec{\mathbf{OA}}_i a_i$$

Y esta condición sólo la cumple un punto, al que llamaremos G, y que se identifica, como veremos más adelante, con el centro de gravedad de un cuerpo. Las coordenadas de G se pueden calcular como

$$\boxed{\vec{\mathbf{OG}} = \frac{\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{OA}}_{\mathbf{i}} \cdot a_i}{\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} a_i}}$$

Mediante esta ecuación se puede calcular la posición de G, siempre y cuando la resultante del sistema no se anule ($\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$).

EJERCICIOS LECCION 2: MOMENTOS Y SISTEMAS DE VECTORES

2.1- Hallar el momento de un vector $\vec{\mathbf{v}} = 4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$ aplicado en el punto (2,-2,0) respecto del origen de coordenadas y respecto de A(4,0,0), comprobando que se cumple la relación: $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{v}}) - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{v}}$

Sol. $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = 10\vec{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} = 6\vec{\mathbf{k}}$

2.2- Calcula el momento de un vector de módulo 5 situado sobre la recta [y= 2x+5; z=0] respecto del origen de coordenadas, en dos puntos distintos de su línea de acción, comprobando que son iguales.

Sol. $-5\sqrt{5}\vec{\mathbf{k}}$

2.3- Un eje pasa por el origen y por el punto (1,2,-2). Calcular el momento respecto de dicho eje del vector V(2,-4,-3) aplicado en P(3,0,1).

Sol. 50/3

2.4- Calcular el momento del vector $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{i}} - 4\vec{\mathbf{j}}$ cuya línea de acción pasa por el punto P(-1,0,1), respecto del eje definido por las ecuaciones: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = z - 1$

Sol: 6

2.5- Un vector deslizante de módulo 5 tiene como línea de acción la recta x = y = z-2. Determinar el momento del vector respecto del punto P(1,2,3) y el momento respecto a la recta que pasa por A(-1,5,-4) y B(0,3,-2).

Sol. $\frac{-5}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{5}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{k}}$; $5\sqrt{3}$

2.6- Dado el vector deslizante $\vec{V}$ (3,-4,5) y un punto A (2,3,1) de su línea de acción, calcular:

1) Su momento _rincipal.
2) Su momento respecto del punto P (2,-3,5).
3) Su momento respecto de la recta que pasa por los puntos B (0,-1,0) y C (2,1,1).
4) Su momento respecto de los ejes coordenados.

Sol. $19\vec{\mathbf{i}} - 7\vec{\mathbf{j}} - 17\vec{\mathbf{k}}$; $14\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} - 18\vec{\mathbf{k}}$; 14/3; 19,-7,-17

2.7- Calcular el momento del vector $\vec{\mathbf{v}} = 5\vec{\mathbf{i}} - 4\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}$ aplicado en el punto P(2,-1,-1) respecto de un eje que forma ángulos de 45º y 60º con los ejes OX y OY, siendo su tercer coseno director positivo, y que pasa por A (-1,0,-3).

Sol: 11.57

2.8- Un sólido gira alrededor del eje OY, siendo la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}} = 3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ N.

a) Calcular el momento de $\vec{\mathbf{F}}$ respecto del origen, si el punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}$ es $\vec{\mathbf{r}} = 5\vec{\mathbf{i}}$ m.
b) Id respecto del punto O' situado en la coordenada (0,-4,0).

c) Comprueba que las componentes M_{0Y} y $M_{0'Y}$ son iguales.
Sol. $\vec{\mathbf{M}}_0 = -10\vec{\mathbf{j}} - 5\vec{\mathbf{k}}$ Nm; $\vec{\mathbf{M}}_{0'} = 8\vec{\mathbf{i}} - 10\vec{\mathbf{j}} - 17\vec{\mathbf{k}}$ N

2.9- Hallar los momentos áxicos del vector $3\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$, aplicado en (1,2,-1) respecto de los ejes cartesianos.
Sol. $M_X = 6$; $M_Y = -2$; $M_Z = 2$

2.10- Dado el sistema de vectores:
$\vec{\mathbf{v}}_1 = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ y un punto $P_1(1,0,2)$ de su línea de acción,
$\vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ y un punto $P_2(1,2,1)$ de su línea de acción,
$\vec{\mathbf{v}}_3 = 3\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$ y un punto $P_3(0,0,0)$ de su línea de acción, determinar:
1) Resultante del sistema.
2) Momento resultante respecto del origen de coordenadas.
3) Momento resultante respecto de (1,1,1).
Sol. $\vec{\mathbf{R}} = 5\vec{\mathbf{i}} + 7\vec{\mathbf{j}} + 5\vec{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{M}}_0 = -5\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{M}}' = -3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$

2.11- Dado el sistema de vectores paralelos:
$\vec{\mathbf{a}}_1 = 2\vec{\mathbf{i}} + 1\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ y $A_1(0,0,0)$ un punto de su línea de acción,
$\vec{\mathbf{a}}_2 = -2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$ y $A_2(1,1,1)$ un punto de su línea de acción,
$\vec{\mathbf{a}}_3 = 4\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ y $A_3(1,0,1)$ un punto de su línea de acción, determinar:
1) Resultante del sistema.
2) Momento resultante respecto del origen de coordenadas.
3) El vector que indica la posición del punto G, $\vec{\mathbf{OG}}$.
4) Comprobar que el momento resultante del sistema respecto de G es nulo.
Sol. $\vec{\mathbf{R}} = 4\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}; \vec{\mathbf{M}}_0 = -2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}; \vec{\mathbf{OG}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}})$